Aufgabe 11. Es sei $U \subset \mathbb{R}^2$ mit

$$U := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - xy + y^2 \leq 2\}.$$

Bestimmen Sie

$$\int_U (x^2 - xy + y^2) dxdy$$

mit Hilfe des Transformationssatzes, indem Sie folgende Transformationen nutzen

$$x = \sqrt{2}u - \sqrt{\tfrac{2}{3}}v \text{ und } y = \sqrt{2}u + \sqrt{\tfrac{2}{3}}v.$$

Wir setzen

$$f(x, y) := x^2 - xy + y^2$$

und erhalten mit obigen Transformationen

$$f\left(\sqrt{2}u - \sqrt{\tfrac{2}{3}}v, \sqrt{2}u + \sqrt{\tfrac{2}{3}}v\right) = 2u^2 + 2v^2.$$

Aus

$$x^2 - xy + y^2 \leq 2$$

erhalten wir

$$u^2 + v^2 \leq 1.$$

Wir setzen

$$U' := \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 \leq 1\}.$$

Die dazugehörige Funktionaldeterminante ist

$$\left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right| = \begin{vmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{\tfrac{2}{3}} \\ \sqrt{2} & \sqrt{\tfrac{2}{3}} \end{vmatrix} = \frac{4}{\sqrt{3}}.$$

Mit dem Transformationssatz folgt

$$\int_U (x^2 - xy + y^2) dxdy = \int_{U'} 2(u^2 + v^2) \frac{4}{\sqrt{3}} dudv.$$

Zur Evaluation des Integrals auf der rechten Seite bietet es sich in Polarkoordinaten zu wechseln (also $u = r\cos\theta$ und $v = r\sin\theta$ mit $0 \leq r \leq 1$ und $0 \leq \theta \leq 2\pi$). Die Funktionaldeterminante bei einem Wechsel zu Polarkoordinaten ist bekanntermaßen r. Wir haben also (mit erneuter Anwendung des Transformationssatzes)

$$\int_{U'} 2(u^2 + v^2) \frac{4}{\sqrt{3}} dudv = \frac{8}{\sqrt{3}} \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^2 r dr d\theta = \frac{8}{\sqrt{3}} \int_0^{2\pi} \left[\tfrac{r^4}{4}\right]_0^1 d\theta = \frac{4\pi}{\sqrt{3}}.$$