Aufgabe 12. Es sei $a \in \mathbb{R}^3$ mit kartesischen Koordinaten (x, y, z). Die folgende Zuordnungen überführen diese in die sogenannten *Kugelkoordinaten* (r, θ, φ) vermöge

$$x = r \sin\theta \cos\varphi, \qquad y = r \sin\theta \sin\varphi, \qquad z = r \cos\theta.$$

(i) Bestimmen Sie die dazugehörige Funktionaldeterminante zu den obigen Transformationen.

(ii) Bestimmen Sie mit (i) und dem Transformationssatz das Volumen der Kugel mit der Gleichung
$$x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$$
für $R \in \mathbb{R}_0^+$.

(i) Die Funktionaldeterminante ist die Determinante der Jacobi-Matrix. Wir erhalten

$$\det \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{pmatrix}.$$

Entwicklung nach der 3. Zeile ergibt

$$\begin{aligned} \det \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)} &= \cos\theta \begin{vmatrix} r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \end{vmatrix} \\ &\quad + r\sin\theta \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \end{vmatrix} \\ &= r^2\sin^3\theta + r^2\sin\theta\cos^2\theta = r^2\sin\theta. \end{aligned}$$

(ii) Für $R \in \mathbb{R}_0^+$ sei

$$K := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$$

die Kugel mit Radius R. Gesucht ist das Volumen V und es gilt

$$V = \int_K dxdydz.$$

Für die Integrationsgrenzen gilt für die obige Koordinatentransformation:

$$0 \leq r \leq R, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

Diese Integrationsgrenzen erhalten wir mit folgender Überlegung: Wir erhalten die Kugel, indem wir den Halbkreis ($0 \leq \theta \leq \pi$) in der Ebene mit Radius R im Raum rotieren ($0 \leq \varphi \leq 2\pi$).

Mit dem Transformationssatz erhalten wir

$$\begin{aligned}\int_K dxdydz &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{R} r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \tfrac{R^3}{3} \sin\theta d\theta d\varphi = \int_0^{2\pi} \tfrac{R^3}{3} [-\cos\theta]_0^{\pi} d\varphi = \int_0^{2\pi} \tfrac{2}{3} R^3 d\varphi = \tfrac{4}{3}\pi^3.\end{aligned}$$