Aufgabe 13. Bestimmen Sie das Volumen des Parallelepipeds gegeben durch

$$0 \leq z \leq 2, \quad 0 \leq y+z \leq 5, \quad 0 \leq x+y+z \leq 10.$$

Es seien V das gesuchte Volumen und U das Integrationsgebiet. Dann gilt

$$V = \int_U dxdydz.$$

Es bietet sich an, folgende Koordinatentransformation durchzuführen:

$$u := x+y+z, \quad v := y+z, \quad w := z.$$

Für das „neue“ Integrationsgebiet U' gilt

$$0 \leq u \leq 10, \quad 0 \leq v \leq 5, \quad 0 \leq w \leq 2.$$

Durch die obige Koordinatentransformation wird offenbar ein Diffeomorphismus

$$\Phi : U \to U'$$

vermittelt. Mit dem Transformationssatz gilt

$$\int_U dxdydz = \int_{U'} |\det(\Phi'(u,v,w))| dudvdw.$$

Es gilt

$$\Phi'(u,v,w) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und damit $\det(\Phi'(u,v,w)) = 1$. Insgesamt erhalten wir

$$V = \int_{U'} |\det(\Phi'(u,v,w))| dudvdw = \int_0^2 \int_0^5 \int_0^{10} dudvdw = 10 \cdot 5 \cdot 2 = 100.$$