Aufgabe 8. (i) Für $d \in \mathbb{N}$ bezeichne $\mathcal{O}^d, \mathcal{C}^d$ bzw. $\mathcal{K}^d$ jeweils das System aller offenen, abgeschlossenen bzw. kompakten Teilmengen des $\mathbb{R}^d$. Zeigen Sie

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) = \sigma(\mathcal{O}^d) = \sigma(\mathcal{C}^d) = \sigma(\mathcal{K}^d).$$

(ii) Folgern Sie mit (i): Jede stetige Abbildung $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ ist Borel-meßbar.

(i) Zur Erinnerung: Es sei $\mathcal{E}$ ein Mengensystem einer nicht-leeren Grundmenge Ω. Mit $\sigma(\mathcal{E})$ ist die kleinste σ-Algebra bezeichnet, die $\mathcal{E}$ enthält. Wir sagen auch: *„Die σ-Algebra $\sigma(\mathcal{E})$ wird von $\mathcal{E}$ erzeugt.“* Es gilt stets

$$\mathcal{E} \subset \sigma(\mathcal{E}).$$

Mit $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ ist die Borelsche σ-Algebra auf $\mathbb{R}^d$ bezeichnet, also die σ-Algebra die von den halboffenen Quader des $\mathbb{R}^d$ erzeugt wird.
Nun zum eigentlichen Beweis:

(a) Wir zeigen zunächst, dass $\sigma(\mathcal{C}^d) = \sigma(\mathcal{K}^d)$ gilt. Nach dem Satz von Heine-Borel ist eine Teilmenge des $\mathbb{R}^d$ genau dann kompakt, wenn sie beschränkt und abgeschlossen ist (diese Aussage ist eine Verallgemeinerung des Satzes 5.42 aus dem Kompendium). Somit ist jede kompakte Menge des $\mathbb{R}^d$ auch abgeschlossen. Somit gilt $\mathcal{K}^d \subset \mathcal{C}^d$. Daraus folgt

$$\sigma(\mathcal{K}^d) \subset \sigma(\mathcal{C}^d). \tag{1}$$

Jede kompakte Menge $C \in \mathcal{C}^d$ ist die Vereinigung einer Folge von abgeschlossenen Mengen $C_n \in \mathcal{K}^d$: Hierzu sei $a \in \mathbb{R}^d$ fest gewählt und K_n die kompakte Kugel mit Radius n um a. Wir setzen dann

$$C_n := C \cap K_n.$$

Somit ist C_n der Schnitt von zwei abgeschlossenen Mengen und damit abgeschlossen. Ferner ist

$$C = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n.$$

Also liegt die Menge der kompakten Menge $\mathcal{C}^d$ in der σ-Algebra $\sigma(\mathcal{K}^d)$, d.h.

$$\mathcal{C}^d \subset \sigma(\mathcal{K}^d).$$

Demnach ist

$$\sigma(\mathcal{C}^d) \subset \sigma(\mathcal{K}^d). \tag{2}$$

Aus (1) und (2) folgt dann

$$\sigma(\mathcal{C}^d) = \sigma(\mathcal{K}^d).$$

Die offenen Mengen sind die Komplemente der abgeschlossenen Mengen, also gilt auch

$$\sigma(\mathcal{O}^d) = \sigma(\mathcal{C}^d) = \sigma(\mathcal{K}^d).$$

(b) Wir zeigen nun $\sigma(\mathcal{O}^d) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. Zunächst zeigen wir $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \subset \sigma(\mathcal{O}^d)$. Es seien $a, b \in \mathbb{R}^d$ mit $a = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$ und $b = (\beta_1, \ldots, \beta_d)$. Ferner sei $a < b$, d.h. $\alpha_j < \beta_j$ für $j = 1, \ldots, d$. Gegeben sei ein halboffener Quader $(a, b] \in \mathbb{R}^d$.
Es sei

$$O_n := (a_n, b)$$

mit

$$a_n = (\alpha_1 - \tfrac{1}{n}, \ldots, \alpha_d - \tfrac{1}{n})$$

ein offener Quader. Dann ist $(O_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Mengenfolge offener Mengen des $\mathbb{R}^d$ deren Schnitt $(a, b]$ ist. Daraus folgt dann die Behauptung.
Wir zeigen $\sigma(\mathcal{O}^d) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. Umgekehrt sei nun ein halboffener Quader $(a, b) \in \mathbb{R}^d$ gegeben. Es sei

$$H_n := (a, b_n]$$

mit

$$b_n := (\min(\alpha_1, \beta_1 + \tfrac{1}{n}), \ldots, \min(\alpha_d, \beta_d + \tfrac{1}{n})).$$

Dann ist $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Mengenfolge halboffener Mengen des $\mathbb{R}^d$ deren Vereinigung (a, b) ist. Daraus folgt dann die Behauptung.

(ii) Es sei $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ stetig. Zur Erinnerung: Eine Funktion $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ ist genau dann stetig, wenn das Urbild jeder offenen Mengen in $\mathbb{R}^n$ offen in $\mathbb{R}^m$ ist. Wie wir in (i) gezeigt haben, erzeugt das System $\mathcal{O}^n$ der offenen Mengen in $\mathbb{R}^n$ die Borelsche σ-Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Aufgrund der Stetigkeit von f gilt

$$\forall O \in \mathcal{O}^n : f^{-1}(O) \in \mathcal{O}^m \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^m).$$

Wir haben damit die Meßbarkeitseigenschaft für einen Erzeuger gezeigt, damit ist f auch Borel-meßbar.