Aufgabe 9. Zeigen Sie, dass die Dirichlet Funktion $D : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$x \mapsto \begin{cases} 1, \text{falls } x \in \mathbb{Q} \\ 0, \text{falls } x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}, \end{cases}$$

nicht Riemann-integrierbar ist, aber Lebesgue-integrierbar. Es bezeichne ferner λ das Lebesgue-Maß. Bestimmen Sie

$$\int_0^1 D d\lambda.$$

- Wir zeigen zunächst, dass D nicht Riemann-integrierbar ist. D ist offenbar beschränkt und es gilt

  $$\sup D = 1 \text{ und } \inf D = 0.$$

  Insgesamt erhalten wir damit für das Ober- und Unterintegral jeweils

  $$\overline{\int} D(x)dx = 1 \text{ und } \underline{\int} D(x)dx = 0.$$

  Da Ober- und Unterintegral verschieden sind, ist D nicht Riemann-integrierbar.

- Nun zeigen wir, dass $D : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lebesgue-integrierbar ist. Da Grund- und Zielmenge gleich sind, setzen wir zur besseren Unterscheidung die Grundmenge als X und die Zielmenge als Y. Da die Borelsche σ-Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ von den offenen Intervallen erzeugt wird (vgl. Aufgabe 8 (i)), genügt es zu zeigen, dass das Urbild eines jeden offenen Intervalls aus Y meßbar in X ist. Es seien dazu $a, b \in Y(= \mathbb{R})$ mit $a < b$ und mit (a, b) das entsprechende offene Intervall bezeichnet. Wir führen eine Fallunterscheidung durch

  - Im Fall $0 \notin (a, b)$ und $1 \notin (a, b)$ gilt

    $$D^{-1}((a, b)) = \varnothing.$$

    Die leere Menge ist meßbar.

  - Im Fall $0 \notin (a, b)$ und $1 \in (a, b)$ ist

    $$D^{-1}((a, b)) = \mathbb{Q}.$$

    $\mathbb{Q}$ ist die abzählbare Vereinigung von meßbaren einelementigen Punktmengen und damit meßbar.

– Im Fall $0 \in (a,b)$ und $1 \notin (a,b)$ ist

$$D^{-1}((a,b)) = \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}.$$

Da $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ das Komplement der meßbaren Menge $\mathbb{Q}$ ist, ist $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ auch meßbar.

– Im Fall $0 \in (a,b)$ und $1 \in (a,b)$ ist

$$D^{-1}((a,b)) = \mathbb{R}.$$

$\mathbb{R}$ ist die Vereinigung von $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ und damit meßbar.

Damit ist das Urbild jedes offenen Intervalls aus Y meßbar – mithin ist D Lebesgue-integrierbar.

- Es seien $A := [0,1] \cap \mathbb{Q}$ und $B := [0,1] \cap \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. Offenkundig sind A und B disjunkt. D ist eine Lebesgue-integrierbare Funktion, die nur zwei Werte (nämlich 0 und 1) annimmt. Wir erhalten daher

$$\int_0^1 D d\lambda = 1 \cdot \lambda(A) + 0 \cdot \lambda(B) = 0,$$

wobei wir die in der Maßtheorie übliche Konvention $0 \cdot \infty = 0$ benutzt haben.