Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Repetitorium 2018, Analysis 2

Blatt 2

Aufgabe 5. (i) Es sei $\Omega := \{a, b, c, d\}$. Geben Sie eine σ-Algebra $\mathcal{A}$ auf Ω an, die $\{a\}$ und $\{b\}$ enthält und verschieden von $\mathcal{P}(\Omega)$ ist.

(ii) Es bezeichne λ das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}^d$ mit $d \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass für jede offene Menge $U \subset \mathbb{R}^d$ gilt $\lambda(U) > 0$.

Aufgabe 6. Es seien Ω eine nicht-leere Menge und $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra über Ω. Zeigen Sie

(i) $\varnothing \in \mathcal{A}$

(ii) für jede Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Mengen aus $\mathcal{A}$ liegt auch $\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_i\right)$ in $\mathcal{A}$

(iii) $\mathcal{A}$ ist stabil gegenüber endlichen Vereinigungen, Schnitten und Differenzen.

Aufgabe 7. Es seien Ω und Ω' nicht-leere Mengen, $\mathcal{A}'$ eine σ-Algebra in Ω' und $T : \Omega \to \Omega'$ eine Abbildung von Ω nach Ω'. Zeigen Sie, dass das Mengensystem

$$T^{-1}(\mathcal{A}') := \{T^{-1}(A') : A' \in \mathcal{A}'\}$$

eine σ-Algebra in Ω ist.

Aufgabe 8. (i) Für $d \in \mathbb{N}$ bezeichne $\mathcal{O}^d, \mathcal{C}^d$ bzw. $\mathcal{K}^d$ jeweils das System aller offenen, abgeschlossenen bzw. kompakten Teilmengen des $\mathbb{R}^d$. Zeigen Sie

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) = \sigma(\mathcal{O}^d) = \sigma(\mathcal{C}^d) = \sigma(\mathcal{K}^d).$$

(ii) Folgern Sie mit (i): Jede stetige Abbildung $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ ist Borel-meßbar.

Aufgabe 9. Zeigen Sie, dass die Dirichlet Funktion $D : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$x \mapsto \begin{cases} 1, \text{falls } x \in \mathbb{Q} \\ 0, \text{falls } x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}, \end{cases}$$

nicht Riemann-integrierbar ist, aber Lebesgue-integrierbar. Es bezeichne ferner λ das Lebesgue-Maß. Bestimmen Sie

$$\int_0^1 D d\lambda.$$