Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Repetitorium 2018, Analysis 2

Blatt 3

Aufgabe 10. Es sei $n \in \mathbb{N}$. Für alle $k \in \mathbb{N}$ sei $f_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine meßbare Funktion. Zeigen Sie, dass

$$M := \{x \in \mathbb{R}^n : (f_k(x))_{k\in\mathbb{N}} \text{ ist monoton wachsend}\}$$

meßbar ist.

Aufgabe 11. Es sei $U \subset \mathbb{R}^2$ mit

$$U := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - xy + y^2 \leq 2\}.$$

Bestimmen Sie

$$\int_U (x^2 - xy + y^2) dxdy$$

mit Hilfe des Transformationssatzes, indem Sie folgende Transformationen nutzen

$$x = \sqrt{2}u - \sqrt{\tfrac{2}{3}}v \text{ und } y = \sqrt{2}u + \sqrt{\tfrac{2}{3}}v.$$

Aufgabe 12. Es sei $a \in \mathbb{R}^3$ mit kartesischen Koordinaten (x, y, z). Die folgende Zuordnungen überführen diese in die sogenannten *Kugelkoordinaten* (r, θ, φ) vermöge

$$x = r \sin\theta \cos\varphi, \qquad y = r \sin\theta \sin\varphi, \qquad z = r \cos\theta.$$

(i) Bestimmen Sie die dazugehörige Funktionaldeterminante zu den obigen Transformationen.

(ii) Bestimmen Sie mit (i) und dem Transformationssatz das Volumen der Kugel mit der Gleichung

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$$

für $R \in \mathbb{R}_0^+$.

Aufgabe 13. Bestimmen Sie das Volumen des Parallelepipeds gegeben durch

$$0 \leq z \leq 2, \quad 0 \leq y + z \leq 5, \quad 0 \leq x + y + z \leq 10.$$