Aufgabe 9
Berechnen Sie den Wert der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-1)(3n+2)}.$$

Lösung.
Behauptung. Es gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-1)(3n+2)} = \frac{1}{6}.$$

Beweis. Es gilt (diese Zerlegung finden wir beispielsweise durch Partialbruchzerlegung)

$$\frac{1}{(3n-1)(3n+2)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3n-1} - \frac{1}{3n+2}\right).$$

Daher gilt

$$\begin{aligned} s_N &:= \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(3n-1)(3n+2)} \\ &= \frac{1}{3}\left[\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{3n-1} - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{3n+2}\right] \end{aligned}$$

Wir führen eine Indexverschiebung bei der zweiten Summe durch und erhalten

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{3n+2} = \sum_{n=2}^{N+1} \frac{1}{3(n-1)+2} = \sum_{n=2}^{N+1} \frac{1}{3n-1}.$$

Also gilt

$$s_N = \frac{1}{3}\left[\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{3n-1} - \sum_{n=2}^{N+1} \frac{1}{3n-1}\right] = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3N+2}\right).$$

Somit gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-1)(3n+2)} = \lim_{N\to\infty} s_N = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3N+2}\right) = \frac{1}{6}.$$

□