Aufgabe 13
Berechnen Sie den Wert der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n}).$$

Lösung.
Behauptung: Es gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})=1-\sqrt{2}.$$

Beweis: Es sei $N\in\mathbb{N}$. Für die N-te Partialsumme erhalten wir

$$\begin{aligned} s_N &= \sum_{n=1}^{N}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n}) \\ &= \tilde{s}_N+\hat{s}_N \end{aligned}$$

mit

$$\tilde{s}_N := \sum_{n=1}^{N}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}) \text{ und } \hat{s}_N := \sum_{n=1}^{N}(-\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$$

$\tilde{s}_N$ und $\hat{s}_N$ sind Teleskopsummen und wir erhalten

$$\begin{aligned} \tilde{s}_N &= (\sqrt{3}+\sqrt{4}+\ldots+\sqrt{N+1}+\sqrt{N+2})-(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\ldots+\sqrt{N+1}) \\ &= \sqrt{N+2}-\sqrt{2} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \hat{s}_N &= (-\sqrt{2}-\sqrt{3}-\ldots-\sqrt{N}-\sqrt{N+1})+(\sqrt{1}+\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{N}) \\ &= 1-\sqrt{N+1}. \end{aligned}$$

Somit gilt

$$\begin{aligned} s_N &= \tilde{s}_N+\hat{s}_N \\ &= \sqrt{N+2}-\sqrt{2}+1-\sqrt{N+1} = \sqrt{N+2}-\sqrt{N+1}+(1-\sqrt{2}) \\ &= \sqrt{N+2}-\sqrt{N+1}\frac{\sqrt{N+2}+\sqrt{N+1}}{\sqrt{N+2}+\sqrt{N+1}}+(1-\sqrt{2}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{N+2}+\sqrt{N+1}}+(1-\sqrt{2}) \to (1-\sqrt{2}) \text{ für } N\to\infty. \end{aligned}$$

Insgesamt gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})=1-\sqrt{2}.$$

$\square$