Aufgabe 37
Untersuchen Sie die folgenden Reihen $\sum_n a_n$ auf Konvergenz mit a_n gegeben durch

(a) $\dfrac{1}{2n+1}$ (b) $\dfrac{1}{n^2+1}$ (c) $\dfrac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ (d) $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$

(e) $\dfrac{n^2-2n+3}{n^4-4n+1}$ (f) $\dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n+1}$ (g) $\dfrac{5^n}{3^{n-1}2^{n+1}}$ (h) $\dfrac{n+3^n}{n^6+2^n}$

(i) $\dfrac{\sqrt{n}}{\log(n)}$ (j) $\dfrac{(-1)^n}{\log(n)}$ (k) $\dfrac{n!}{(2n)!}$

Lösungen. Wir machen Gebrauch von folgendem Satz: Es sei $s \in \mathbb{Q}$. Falls $s > 1$ ist, so konvergiert $\sum_n \frac{1}{n^s}$. Falls $s \leq 1$ ist, so divergiert $\sum_n \frac{1}{n^s}$.

(a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $2n+1 \leq 2n+n = 3n$. Also gilt

$$\sum_n a_n := \sum_n \frac{1}{2n+1} \geq \sum_n \frac{1}{3n} = \frac{1}{3}\sum_n \frac{1}{n}$$

Damit gibt es eine divergente Minorante und $\sum_n a_n$ divergiert nach dem Minorantenkriterium.

(b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $n^2+1 \geq n^2$. Also gilt

$$\sum_n b_n := \sum_n \frac{1}{n^2+1} \leq \sum_n \frac{1}{n^2}.$$

Somit gibt es eine konvergente Majorante und $\sum_n b_n$ konvergiert nach dem Majorantenkriterium.

(c) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$n(n+1) = n^2+n < n^2+3n^2 = 4n^2.$$

Da die Quadratwurzel streng monoton wachsend ist, erhalten wir weiter

$$\sqrt{n(n+1)} < \sqrt{4n^2} = 2n.$$

Also gilt

$$\sum_n c_n := \sum_n \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} > \sum_n \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}\sum_n \frac{1}{n}.$$

Wir haben damit $\sum_n c_n$ durch die harmonische Reihe nach unten abgeschätzt, letztere divergiert. Also divergiert nach dem Minorantenkriterium auch $\sum_n c_n$.

(d) Es gilt

$$\begin{aligned} s_N &:= \sum_{n=1}^{N}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) = \sum_{n=1}^{N}\sqrt{n+1} - \sum_{n=1}^{N}\sqrt{n} \\ &= \sqrt{N+1}-\sqrt{1}. \end{aligned}$$

s_N ist also unbeschränkt und damit ist die Folge der Partialsummen nicht konvergent.

(e) Es gibt ein $k \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq k}$ gilt

$$n^2 - 2n + 3 \leq n^2 + n^2 = 2n^2. \tag{1}$$

Ebenso gibt es ein $\ell \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq \ell}$ gilt

$$n^4 - 4n + 1 \geq \frac{1}{2}n^4, \text{ also gilt}$$

$$\frac{1}{n^4 - 4n + 1} \leq \frac{2}{n^4}. \tag{2}$$

Aus (1) und (2) folgt, dass für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq m}$ mit $m := \max(k, \ell)$ gilt

$$e_n := \frac{n^2 - 2n + 3}{n^4 - 4n + 1} \leq 2n^2 \cdot \frac{2}{n^4} = \frac{4}{n^2}.$$

Damit konvergiert $\sum\limits_n e_n$ mit dem Majorantenkriterium.

(f) Mit der 3. Binomischen Formel ergibt sich

$$f_n := \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n+1} = \frac{1}{(n+1)(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} \leq \frac{1}{n(\sqrt{n} + \sqrt{n})} = \frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}.$$

Damit gibt es eine konvergente Majorante zu $\sum\limits_n f_n$ und sie konvergiert mit dem Majorantenkriterium.

(g) Es gilt

$$g_n := \frac{5^n}{3^{n-1}2^{n+1}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{5^n}{3^n 2^n} = \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^n.$$

Also gilt

$$\sum_n g_n = \frac{3}{2} \sum_n \left(\frac{5}{6}\right)^n,$$

$\sum\limits_n g_n$ ist mit $|\frac{5}{6}| < 1$ eine konvergente geometrische Reihe.

(h) Wir zeigen, dass die Folge

$$(h_n)_{n \in \mathbb{N}} := \left(\frac{n + 3^n}{n^6 + 2^n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$$

keine Nullfolge ist. Damit ist die dazugehörige Reihe mit dem Nullfolgenkriterium divergent. Für fast alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$n^6 < 2^n.$$

Für fast alle $n \in \mathbb{N}$ folgt daraus

$$\frac{n + 3^n}{n^6 + 2^n} \geq \frac{n + 3^n}{2^n + 2^n} \geq \frac{3^n}{2 \cdot 2^n} = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^n.$$

Damit ist (h_n) unbeschränkt und daher nicht konvergent und erst recht keine Nullfolge.

(i) Es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \log(n) = +\infty$. Wir haben

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \text{ und } (\log(x))' = \frac{1}{x}$$

und weiter

$$\frac{(\sqrt{x})'}{(\log(x))'} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\frac{1}{x}} = \frac{\sqrt{x}}{2} \to \infty \text{ für } x \to \infty.$$

Mit l'Hospital folgt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{\log(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{n})'}{(\log(n))'} = \infty.$$

Also ist $\left(\frac{\sqrt{n}}{\log(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ keine Nullfolge. Die dazugehörige Reihe ist damit divergent.

(j) Da $\log(n)$ streng monoton wachsend für $n \to \infty$ ist, ist $\frac{1}{\log(n)}$ ist eine streng monoton fallende Nullfolge für $n \to \infty$. Nach dem Leibniz-Kriterium konvergiert die alternierende Reihe $\sum\limits_{n} \frac{(-1)^n}{\log(n)}$.

(k) Es sei $a_n := \frac{n!}{(2n)!}$. Wir erhalten

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(n+1)!}{(2n+2)!}\frac{(2n)!}{n!} = \frac{(n+1)(2n)!}{(2n)!(2n+1)(2n+2)} = \frac{n+1}{(2n+1)(2n+2)} \\ &\leq \frac{n+1}{(2n+1)^2} \leq \frac{2n+1}{(2n+1)^2} = \frac{1}{(2n+1)} \leq \frac{1}{n}.\end{aligned}$$

Also gilt

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{1}{n}.$$

Sei $q := \frac{1}{2}$. Da $\left(\frac{1}{n}\right)$ eine Nullfolge ist, gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq N$ gilt

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{1}{n} < q = \frac{1}{2} < 1.$$

Nach dem Quotientenkriterium konvergiert $\sum\limits_{n} \frac{n!}{(2n)!}$.