Aufgabe 12

Sei $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch $\varphi \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} y \\ 2x - z \\ x \end{pmatrix}$. Was ist die Matrix von φ bezüglich der Basis

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}?$$

Lösung. Diese Aufgabe ist eine Variation der Aufgabe 11. Gegeben sei $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch $\varphi \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} y \\ 2x - z \\ x \end{pmatrix}$. Die Darstellungsmatrix $M_\mathcal{A}$ bezüglich einer nicht näher spezifizierten Basis $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, a_3\}$ ist dann gegeben durch

$$M_\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

denn

$$M_\mathcal{A} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ 2x - z \\ x \end{pmatrix}.$$

Gesucht ist nun $M_\mathcal{B}$ bezüglich der Basis $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, b_3\}$ mit

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Hier sind b_1, b_2 und b_3 bezüglich der Basis $\mathcal{A}$ angegeben. Die Situation wird durch das folgende Diagramm beschrieben

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^3_\mathcal{A} \arrow[r, "T^\mathcal{A}_\mathcal{B}"] \arrow[d, "M_\mathcal{A}"'] & \mathbb{R}^3_\mathcal{B} \arrow[d, "M_\mathcal{B}"] \\
\mathbb{R}^3_\mathcal{A} \arrow[r, "T^\mathcal{A}_\mathcal{B}"'] & \mathbb{R}^3_\mathcal{B}
\end{tikzcd}$$

Es gilt daher

$$M_\mathcal{B} = T^\mathcal{A}_\mathcal{B} \cdot M_\mathcal{A} \cdot T^\mathcal{B}_\mathcal{A}.$$

Die Basiswechselmatrix $T^\mathcal{B}_\mathcal{A}$ ist in diesem Fall leicht ermittelt: Ihre Spalten sind die Vektoren (b_1, b_2, b_3). Es gilt

$$T^\mathcal{B}_\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Invertieren von $T^\mathcal{B}_\mathcal{A}$ liefert

$$T^\mathcal{A}_\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Insgesamt erhalten wir also

$$M_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$