Aufgabe 20
Es sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}_{>0}$. Zeigen Sie, ausgehend von den Eigenschaften D1 (Linearität), D2 (Alterniertheit) und D3 (Normiertheit) der Determinantenfunktion

$$\det : K^{n\times n} \to K,$$

dass diese auch die Eigenschaften D4, D5, D7, D8, D9 und D11 besitzt.
Lösung. Wir führen zunächst einige Bezeichnungen zu elementaren Zeilenumformungen ein:

- ⋆ Wird zu einer Zeile einer Matrix ein Vielfaches einer anderen Zeile hinzuaddiert, so bezeichnen wir diese Zeilenumformung als Typ I.
- ⋆ Wird eine Zeile mit einer anderen getauscht, so bezeichnen wir diese Zeilenumformung als Typ II.
- ⋆ Wird eine Zeile mit einem Skalar multipliziert, so bezeichnen wir diese Zeilenumformung als Typ III.

- **(D4)** Behauptung: Es gilt $\forall \lambda \in K \forall n \in \mathbb{N} \forall A \in K^{n\times n}$ gilt

$$\det(\lambda \cdot A) = \lambda^n \det(A).$$

Beweis: Die Aussage folgt durch n-fache Anwendung der Linearität D1.

- **(D5)** Behauptung: Hat A eine Nullzeile, so ist $\det(A) = 0$.
Beweis: Sei a_i eine Nullzeile. Dann gilt $a_i = 0 \cdot a_i$. Wieder folgt die Aussage aus der Linearität

$$\det \begin{pmatrix} \vdots \\ a_i \\ \vdots \end{pmatrix} = 0 \cdot \det \begin{pmatrix} \vdots \\ a_i \\ \vdots \end{pmatrix} = 0.$$

- **(D7)** Behauptung: Entsteht B aus A durch Addition der λ-fachen j-ten Zeile zur i-ten Zeile ($i \neq j$), so ist $\det(A) = \det(B)$.
Beweis: Wir haben

$$\det B = \det \begin{pmatrix} a_i + \lambda a_j \\ a_j \end{pmatrix} \overset{\text{D1}}{=} \underbrace{\det \begin{pmatrix} a_i + \lambda a_j \\ a_j \end{pmatrix}}_{=\det A} + \lambda \cdot \underbrace{\det \begin{pmatrix} a_j \\ a_j \end{pmatrix}}_{\overset{\text{D2}}{=} 0} = \det A.$$

- **(D8)** Behauptung: Ist A eine obere Dreiecksmatrix, also

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

so gilt $\det(A) = \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n$.
Beweis: 1. Fall: Alle $\lambda_i \neq 0$. Dann lässt sich A *nur* durch Anwendung elementarer Zeilenumformungen des Typs I, überführen in

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Wegen D7 gilt $\det A = \det \widetilde{A}$. Ferner gilt

$$\det \widetilde{A} = \begin{vmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{vmatrix} \overset{\text{D1}}{=} \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n \begin{vmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{vmatrix} \overset{\text{D3}}{=} \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n.$$

2. Fall: Es gibt ein i mit $\lambda_i = 0$. Dann wählen wir i maximal, d.h. $\lambda_{i+1}, \ldots, \lambda_n \neq 0$. Mit Hilfe der Zeilen $a_{i+1}, \ldots, a_n$ produzieren wir in der i-ten Zeile eine Nullzeile mit elementaren Zeilenumformungen. Nach D7 verändern wir den Wert der Determinante nicht. Mit D5 ist die Determinante gleich 0.

- **(D9)** Behauptung: Sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ und A eine Matrix von der Gestalt

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & C \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$$

wobei A_1, A_2 quadratische Matrizen seien.

Dann gilt $\det(A) = \det(A_1) \cdot \det(A_2)$.

Beweis: Wir überführen A_1 mittels elementarer Zeilenoperationen des Typs I und des Typs II in eine obere Dreiecksmatrix B_1, dabei wird aus C die Matrix C'. Nach D6 und D7 gilt

$$\det(A_1) = (-1)^k \det(B_1),$$

wobei k die Anzahl der Zeilenoperationen des Typs II bezeichne. Ebenso überführen wir A_2 in eine obere Dreiecksmatrix B_2 mittels elementarer Zeilenoperationen des Typs I und II, dabei bleiben B_1 und C' unverändert und es gilt

$$B = \begin{pmatrix} B_1 & C' \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}.$$

Ferner gilt

$$\det(A_2) = (-1)^\ell \det(B_2),$$

hierbei bezeichnet ℓ die Anzahl elementarer Zeilenumformungen des Typs II.

Nach D8 gilt

$$\det(B) = \det(B_1) \cdot \det(B_2)$$

und nach D6 und D7 gilt

$$\begin{aligned} \det(A) &= (-1)^{k+\ell} \det(B) = (-1)^{k+\ell} \det(B_1) \cdot \det(B_2) \\ &= (-1)^{k+\ell}(-1)^k \det(A_1)(-1)^\ell \det(A_2) = \det(A_1) \cdot \det(A_2). \end{aligned}$$

- **(D11)** Behauptung: Für $A, B \in K^{n\times n}$ gilt $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$.

Beweis: Es seien $A, B \in K^{n\times n}$. Vor dem eigentlichen Beweis führen wir sogenannte Elementarmatrizen ein, um die Typen I, II und III elementarer Zeilenumformungen als Matrizenmultiplikation zu beschreiben.

  - Entsteht B aus A, indem zur i-ten Zeile das λ-fache der j-ten Zeile addiert wird, so kann diese Zeilenumformung des Typs I als *Elementarmatrix* angewandt auf A beschrieben werden. Es gilt

$$B = E_j^i(\lambda) \cdot A,$$

wobei $E_j^i(\lambda) \in K^{n\times n}$ wie folgt aussieht: Alle Einträge auf der Hauptdiagonalen sind 1. Der Eintrag in der i-ten Zeile und j-ten Zeile ist λ. Alle anderen Einträge sind 0. Nach (D8) gilt

$$\det(E_j^i(\lambda)) = 1, \tag{1}$$

denn $E_j^i(\lambda)$ ist entweder eine obere oder eine untere Dreiecksmatrix.

- Entsteht B aus A, indem die i-te Zeile mit der j-ten Zeile getauscht wird, so gilt

$$B = T_j^i \cdot A,$$

wobei der T_j^i aus der Einheitsmatrix entsteht, indem die i-te Zeile mit der j-te Zeile getauscht wird. Dann gilt

$$\det(T_j^i) = (-1). \tag{2}$$

- Entsteht B aus A, indem die i-te Zeile mit $\lambda \in K$ multipliziert, so gilt

$$B = L^i(\lambda) \cdot A,$$

wobei $L^i(\lambda)$ aus der Einheitsmatrix entsteht, indem die i-te Zeile mit λ multipliziert wird. Dann gilt

$$\det(L^j(\lambda)) = \lambda. \tag{3}$$

Nun zum eigentlichen Beweis:

- Falls A singulär ist, so ist auch $A \cdot B$ auch singulär. Dann gilt

$$0 = \det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B).$$

- Falls A regulär ist, so ist A invertierbar. Wir können dann mit einer endlichen Folge von Zeilenumformungen der Typen I, II und III die Matrix A in die Einheitsmatrix überführen, d.h.

$$(E_k \cdot \ldots \cdot E_1) \cdot A = \mathbb{1},$$

wobei die $E_j, j = 1 \ldots k$ aus den obigen Elementarmatrizen bestehen. Also lässt sich jede reguläre Matrix als Produkt von Elementarmatrizen schreiben

$$A = E_1 \cdot \ldots \cdot E_k.$$

Es genügt also die Aussage für Elementarmatrizen zu zeigen:

  * Für $A = E_j^i(\lambda)$ gilt

$$\begin{aligned}\det(A \cdot B) &= \det(E_j^i(\lambda) \cdot B) \overset{\text{D7}}{=} 1 \cdot \det(B) \overset{(1)}{=} \det(E_j^i(\lambda)) \cdot \det(B)\\ &= \det(A) \cdot \det(B).\end{aligned}$$

  * Für $A = T_j^i$ gilt

$$\begin{aligned}\det(A \cdot B) &= \det(T_j^i \cdot B) \overset{\text{D6}}{=} (-1) \cdot \det(B) \overset{(2)}{=} \det(T_j^i) \cdot \det(B)\\ &= \det(A) \cdot \det(B).\end{aligned}$$

  * Für $A = L^i(\lambda)$ gilt

$$\begin{aligned}\det(A \cdot B) &= \det(L^i(\lambda) \cdot B) \overset{\text{D1}}{=} \lambda \cdot \det(B) \overset{(3)}{=} \det(L^i(\lambda)) \cdot \det(B)\\ &= \det(A) \cdot \det(B).\end{aligned}$$