Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Repetitorium Lineare Algebra 2019

Lösungen – Zusatzaufgaben

Zusatzaufgabe 2
Es sei $\varphi : V \to W$ eine lineare, surjektive Abbildung zwischen K-Vektorräumen und ferner $\{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis von V. Eine der folgenden Aussagen ist immer richtig, die andere gilt nicht immer. Geben Sie für die richtige Aussage einen Beweis, für die falsche ein Gegenbeispiel.

(a) $\{\varphi(v_1), \ldots, \varphi(v_n)\}$ ist ein Erzeugendensystem von W.

(b) $\{\varphi(v_1), \ldots, \varphi(v_n)\}$ ist linear unabhängig in W.

Lösung.

(a) Die Aussage ist wahr. Wir müssen zeigen, dass jedes $w \in W$ sich als Linearkombination der $\varphi(v_1), \ldots, \varphi(v_n)$ schreiben lässt. Sei also $w \in W$. Da φ nach Voraussetzung surjektiv ist, gibt es ein $v \in V$ mit $\varphi(v) = w$. Da $\{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis von V ist, gilt $v = \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j v_j$ für geeignete $\lambda_j \in K$ mit $j = 1 \ldots, n$. Die Linearität von φ liefert

$$w = \varphi(v) = \varphi\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j v_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \varphi(v_j),$$

dies war zu zeigen.

(b) Die Aussage gilt nicht immer. Wir geben also ein Beispiel an, so dass $\varphi : V \to W$ eine lineare, surjektive Abbildung ist, aber $\{\varphi(v_1), \ldots, \varphi(v_n)\}$ ist linear abhängig in W. Wie finden wir ein solches Beispiel? Wir können $K = \mathbb{R}, V = \mathbb{R}^n$ und $W = \mathbb{R}^m$ wählen. m sollte so klein wie möglich gewählt werden; $m = 1$ kommt nicht in Frage, denn ein Vektor in einem 1-dimensionalen Vektorraum ist immer linear unabhängig. Wir wählen daher $m = 2$. Da 3 Vektoren in einem 2-dimensionalen Vektorraum immer linear abhängig sind, wählen wir $n = 3$. Wir betrachten nun folgende Matrix $A \in M_{2\times 3}(\mathbb{R})$ gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Der Rang von A ist 2. Die Spaltenvektoren sind linear abhängig. Es sei nun $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ mit Darstellungsmatrix A. Dann ist φ eine surjektive, lineare Abbildung und $\{\varphi(e_1), \varphi(e_2), \varphi(e_3)\}$ ist linear abhängig.

Zusatzaufgabe 3
Sei V ein $\mathbb{Q}$-Vektorraum und $x_1, \ldots, x_r, y \in V$. Ferner gelte $y \notin \langle x_1, \ldots, x_r \rangle$. Zeigen Sie: Ist $\{x_1, \ldots, x_r\}$ linear unabhängig, so auch $\{x_1 + y, \ldots, x_r + y\}$.
Beweis. Es sei $\{x_1, \ldots, x_r\}$ linear unabhängig. Angenommen,

$$M := \{x_1 + y, \ldots, x_r + y\}$$

ist linear abhängig. Dann lässt sich ein Vektor aus M als Linearkombination schreiben, o.E. sei $x_1 + y$ ein solcher Vektor. Somit haben wir

$$x_1 + y = \sum_{j=2}^{r} \lambda^j (x_j + y) \Leftrightarrow y \underbrace{\left[1 - \sum_{j=2}^{r} \lambda^j\right]}_{=:\ell} = -x_1 + \sum_{j=2}^{r} \lambda^j x_j$$

- Falls $\ell = 0$ ist, folgt
$$0 = -x_1 + \sum_{j=2}^{r} \lambda^j x_j,$$
d.h. $\{x_1, \ldots, x_r\}$ ist linear abhängig. Widerspruch zur Voraussetzung!
- Falls $\ell \neq 0$ ist, folgt
$$y = \frac{1}{\ell}\left[-x_1 + \sum_{j=2}^{r} \lambda^j x_j\right],$$
d.h. $y \in \langle x_1, \ldots, x_r \rangle$. Widerspruch zur Voraussetzung!

$\square$

Zusatzaufgabe 4
Sei $n \in \mathbb{N}$ und $\tau \in S_n$. Zeigen Sie, dass $H_\tau := \{\sigma \in S_n : \sigma\tau = \tau\sigma\}$ eine Untergruppe von S_n ist.
Beweis. Für den Beweis weisen wir folgende Aussagen nach:

(i) H_τ ist nicht-leer

(ii) $\forall \varphi, \pi$ mit $\varphi, \pi \in H_\tau$ gilt $\varphi\pi \in H_\tau$

(iii) $\forall \varphi$ mit $\varphi \in H_\tau$ gilt $\varphi^{-1} \in H_\tau$

Zu (i): Wegen $\mathrm{id}\,\tau = \tau\,\mathrm{id}$ gilt $\mathrm{id} \in H_\tau$, also ist H_τ nicht-leer. $\square$
Zu (ii): Es seien $\varphi, \pi \in H_\tau$. Wir müssen $\varphi\pi \in H_\tau$ zeigen, d.h. $\varphi\pi\tau = \pi\varphi\tau$. Nach Voraussetzung gilt

$$\varphi\tau = \tau\varphi \tag{1}$$

und

$$\pi\tau = \tau\pi. \tag{2}$$

Es gilt

$$\varphi\pi\tau = \varphi(\pi\tau) \overset{(2)}{=} \varphi(\tau\pi) = (\varphi\tau)\pi \overset{(1)}{=} (\tau\varphi)\pi = \tau\varphi\pi,$$

dies war zu zeigen. $\square$

Zu (iii): Es sei $\varphi \in H_\tau$. Wir müssen zeigen, dass auch $\varphi^{-1} \in H_\tau$ ist, d.h. $\varphi^{-1}\tau = \tau\varphi^{-1}$. Wegen $\varphi \in H_\tau$ gilt

$$\varphi\tau = \tau\varphi.$$

Hieraus folgt

$$\varphi^{-1}\varphi\tau = \varphi^{-1}\tau\varphi \Leftrightarrow \tau = \varphi^{-1}\tau\varphi \Leftrightarrow \tau\varphi^{-1} = \varphi^{-1}\tau\varphi\varphi^{-1} \Leftrightarrow \tau\varphi^{-1} = \varphi^{-1}\tau,$$

dies war zu zeigen. $\square$

Zusatzaufgabe 5

Sei $V = \{f \in \mathbb{R}[t] : \deg f \leq 2\}$ ein Untervektorraum von $\mathbb{R}[t]$. Zeigen Sie, dass es für jedes $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ genau ein $f \in V$ gibt mit

$$f(1) = a \qquad f'(0) = b \qquad f(0) = c$$

und geben Sie dieses f explizit an.
Lösung. Zu gegebenem $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ müssen wir zeigen, dass es genau ein $f \in V$ gibt mit

$$f(1) = a \qquad f'(0) = b \qquad f(0) = c.$$

Jedes $f \in V$ ist von der Gestalt

$$f = a_2t^2 + a_1t + a_0 \text{ mit } (a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{R}^3.$$

Die Bedingungen liefern folgendes lineares Gleichungssystem

$$\begin{aligned} f(1) &= a_2 + a_1 + a_0 = a \\ f'(0) &= a_1 = b \\ f(0) &= a_0 = c. \end{aligned}$$

Die erweiterte Koeffizientenmatrix ist also

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \end{array}\right).$$

Die Matrix hat vollen Rang, d.h. es gibt genau eine Lösung. Aus dem LGS lesen wir sofort ab

$$a_2 = a - b - c, \qquad a_1 = b, \qquad a_0 = c,$$

also gibt es zu $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ genau ein $f \in V$ mit den geforderten Eigenschaften, nämlich

$$f = (a - b - c)t^2 + bt + c.$$

$\square$