

### Zusatzaufgabe 1

Es sei  $V = \mathbb{F}_2^3$  der dreidimensionale Standardvektorraum über dem endlichen Körper  $\mathbb{F}_2$ . Eine lineare Abbildung

$$\varphi : V \rightarrow V$$

sei gegeben durch

$$\varphi((1, 0, 0)^T) = (1, 1, 1)^T, \quad \varphi((0, 1, 0)^T) = (0, 1, 1)^T, \quad \varphi((0, 0, 1)^T) = (1, 0, 0)^T.$$

- (a) Geben Sie die Darstellungsmatrix von  $\varphi$  und Basen von  $\text{Kern}(\varphi)$  und  $\text{Im}(\varphi)$  an. Verifizieren Sie die Dimensionsformel

$$\dim \ker \varphi + \dim \text{im} \varphi = \dim V.$$

- (b) Berechnen Sie die Verkettung  $\psi = \varphi^2 = \varphi \circ \varphi$ . Welche Dimension haben Kern und Bild von  $\psi$ ? Wie sieht  $\varphi^3$  aus?

### Lösung.

- (a) Die Darstellungsmatrix der Abbildung ist gegeben durch

$$M := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

denn die Spaltenvektoren der Darstellungsmatrix sind die Bilder der Basisvektoren. Das homogene Gleichungssystem, also

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} x = 0,$$

liefert  $x_2 = -x_1$  und  $x_3 = -x_1$  mit  $x_1$  frei wählbar in  $\mathbb{F}_2$ . Wir beachten, dass in  $\mathbb{F}_2$  das Inverse zu 1 das Element 1 selbst ist. Somit ist

$$\ker \varphi = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Das Bild von  $\varphi$  wird von den Spaltenvektoren von  $M$  erzeugt. Der dritte Spaltenvektor lässt sich als Summe der ersten beiden schreiben:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

dabei beachten wir, dass  $1 + 1 = 0$  in  $\mathbb{F}_2$  gilt. Wir können also den dritten Spaltenvektor aus dem Erzeugendensystem streichen. Sind die beiden verbleibenden Spaltenvektoren linear unabhängig, so haben wir eine Basis des Bildes gefunden – dies ist auch der Fall: Die ersten beiden Spaltenvektoren sind linear unabhängig. Damit gilt

$$\text{im} \varphi = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Insgesamt erhalten wir also  $\dim \ker \varphi = 1$  und  $\dim \text{im} \varphi = 2$ ; die Dimensionsformel gilt natürlich auch für diese lineare Abbildung

$$3 = \dim V = \dim \ker \varphi + \dim \text{im} \varphi = 1 + 2.$$

---

(b) Die Darstellungsmatrix zu  $\psi$  ist

$$M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Auch bei der Berechnung von  $M^2$  ist beachten, dass  $1 + 1 = 0$  in  $\mathbb{F}_2$  gilt. Die Dimension des Bildes entspricht dem Zeilenrang. Dieser ist offenbar 1, also  $\dim \psi = 1$ . Nach der Dimensionsformel ist  $\dim \ker \psi = 2$ . Die Darstellungsmatrix zu  $\varphi^3$  ist

$$M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Also entspricht  $\varphi^3$  der Nullabbildung, d.h. alles wird auf die Null abgebildet, daher ist  $\dim \ker \varphi^3 = 3$  und  $\dim \operatorname{im} \varphi^3 = 0$ .  $\square$