



## Blatt 2

### Aufgabe 7

Die Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sei rekursiv definiert durch  $a_0 := 1$  und  $a_{n+1} := \frac{1}{1+a_n}$  für  $n \in \mathbb{N}_0$ . Zeigen Sie, dass  $(a_n)$  eine Cauchy-Folge ist und bestimmen Sie den Grenzwert von  $(a_n)$ .

### Aufgabe 8

Überprüfen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und beweisen Sie die Richtigkeit Ihrer Antwort:

- (a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n-1}$       (b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n5^n}$
- (c)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n+1}$       (d)  $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n} - 1)^n$
- (e)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 + (-1)^n}{2^{n-1}}$       (f)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^n + b^n}$  mit  $a, b \in \mathbb{R}$  und  $0 < b < 1 < a$
- (g)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1303}\sqrt{n+2019}}$

### Aufgabe 9

Berechnen Sie den Wert der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-1)(3n+2)}.$$

### Aufgabe 10

Zeigen Sie für  $s \in \mathbb{Q}$ , dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

konvergiert für  $s > 1$  und divergiert für  $s \leq 1$ .

### Aufgabe 11

Am Anfang eines 10m langen Gummibandes sitzt eine Schnecke. Jeden Tag kriecht sie einen Meter voran. Nachts, wenn sie ruht, dehnt ein Dämon das Band gleichmäßig so aus, dass es jedes Mal um 10m länger wird. Dämon und Schnecke seien unsterblich, das Band unbegrenzt dehnbar. Erreicht die Schnecke jemals das Ende des Bandes? Beweisen Sie die Richtigkeit Ihrer Antwort.