



## Blatt 4

### Aufgabe 14

Untersuchen Sie die folgenden Funktionen  $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$  bzw.  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  auf Stetigkeit und beweisen Sie jeweils Ihre Aussagen:

$$(a) \quad f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{falls } 0 \leq x \leq 1 \\ 2 - x, & \text{falls } 1 < x \leq 2. \end{cases}$$
$$(b) \quad g(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2}, & \text{falls } x \neq 2 \\ a \text{ mit } a \in \mathbb{R}, & \text{falls } x = 2. \end{cases}$$

### Aufgabe 15

Zeigen Sie, dass die Dirichletsche Sprungfunktion  $D : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch

$$x \mapsto \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{falls } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

nirgends stetig ist.

### Aufgabe 16

Wiederholen Sie eigenständig die Begriffe *gleichmäßige Stetigkeit* und *Lipschitz-Stetigkeit* und bearbeiten Sie im Anschluss die Aufgaben 17 und 18.

### Aufgabe 17

Es seien  $D \subset \mathbb{R}$  und  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion.

- (a) Zeigen Sie: Wenn  $f$  Lipschitz-stetig ist, dann ist  $f$  auch gleichmäßig stetig.
- (b) Zeigen Sie: Wenn  $f$  gleichmäßig stetig ist, dann ist  $f$  auch stetig.

### Aufgabe 18

Es sei  $f : [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} -\sqrt{x} & 0 \leq x \leq 2 \\ \sqrt{-x} & -2 \leq x < 0. \end{cases}$$

Untersuchen Sie  $f$  auf Stetigkeit, gleichmäßige Stetigkeit und Lipschitz-Stetigkeit. Beweisen Sie jeweils Ihre Aussagen.