Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Repetitorium Analysis 2019

Blatt 7

Aufgabe 28

Es sei (a_n) die reellwertige Folge gegeben durch $a_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Was ist falsch an den folgenden Aussagen?

(i) Der Ausdruck in der Klammer ist größer als 1. Somit muss ihre n-te Potenz für $n \to \infty$ gegen unendlich konvergieren.

(ii) Der Ausdruck in der Klammer konvergiert gegen 1. Somit muss ihre n-te Potenz für $n \to \infty$ gegen 1 konvergieren.

(iii) Falls eine reellwertige Folge (b_n) gegen $b \in \mathbb{R}$ konvergiert, so nähern sich die Folgenglieder b_n immer näher an b an.

Aufgabe 29

Bestimmen Sie

(a) $\displaystyle\int (4x^3 + \sqrt{2}x^2 - 17x + 1)dx$ (b) $\displaystyle\int \sum_{k=0}^{n} x^k dx$

(c) $\displaystyle\int x^n \exp(x)dx$ ($n \in \mathbb{N}$ fest) (d) $\displaystyle\int \cos(3x+4)dx$ (e) $\displaystyle\int x^2\sqrt{1+x^2}dx$

(f) $\displaystyle\int_1^2 \cos^2(x)dx$ (g) $\displaystyle\int_1^2 \ln(x)dx$ (h) $\displaystyle\int 7^x dx$ (i) $\displaystyle\int_0^\pi \sin(\sqrt{x})dx$

(j) $\displaystyle\int_2^3 \frac{x}{x^2-1}dx$ (k) $\displaystyle\int_0^1 \frac{6x}{(x^2+1)^3}dx$ (l) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin(x)}\cos(x)dx$

(m) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^2+8x+1}{x^2-1}dx$ (n) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos(x)}dx$

Aufgabe 30

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} x^2\cos(\frac{1}{x}), \text{ falls } x \neq 0 \\ 0, \text{ falls } x = 0. \end{cases}$$

Zeigen oder widerlegen Sie, dass f stetig differenzierbar ist.

Aufgabe 31

Es seien $n \in \mathbb{N}$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine n-mal differenzierbare Funktion. Mit $f^{(n)}$ bezeichnen wir die n-te Ableitung von f. Zeigen Sie: Falls es $n+1$ verschiedene Zahlen $x_1 < \ldots < x_{n+1}$ gibt mit

$$f(x_j) = 0 \text{ für } j = 1, \ldots, n+1,$$

so gibt es ein $\xi \in (x_1, x_{n+1})$ mit $f^{(n)}(\xi) = 0$.