Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Repetitorium Analysis 2019

**Blatt 8**

**Aufgabe 32**
Es seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ Funktionen. Zeigen oder widerlegen Sie

(i) Falls $g \circ f$ injektiv ist, so ist auch $f$ injektiv.

(ii) Falls $g \circ f$ injektiv ist, so ist auch $g$ injektiv.

(iii) Falls $g \circ f$ surjektiv ist, so ist auch $f$ surjektiv.

(iv) Falls $g \circ f$ surjektiv ist, so ist auch $g$ surjektiv.

**Aufgabe 33**
Beweisen Sie, dass die folgende Gleichung eine Lösung in $\mathbb{R}$ besitzt:

$$\sqrt{\frac{x^2+2x+2}{x^4+1}} = x.$$

**Aufgabe 34**
Zeigen Sie, dass für alle $x, y \in \mathbb{R}$

$$|\sin(x) - \sin(y)| \leq |x - y|$$

gilt.

**Aufgabe 35**
Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \sin(\frac{1}{x}), \text{ falls } x \neq 0 \\ 0, \text{ falls } x = 0. \end{cases}$$

Zeigen oder widerlegen Sie, dass $f$ stetig differenzierbar ist.

**Aufgabe 36**
Bestimmen Sie

(a) $\displaystyle\int \sin(x)\exp(\cos(x))dx$ (b) $\displaystyle\int \frac{\sin(x)+\cos(x)}{\sin(x)-\cos(x)}dx$

(c) $\displaystyle\int \frac{\exp(\tan(x))}{\cos^2(x)}dx$

**Aufgabe 37**
Untersuchen Sie die folgenden Reihen $\sum_n a_n$ auf Konvergenz mit $a_n$ gegeben durch

(a) $\dfrac{1}{2n+1}$ (b) $\dfrac{1}{n^2+1}$ (c) $\dfrac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ (d) $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$

(e) $\dfrac{n^2-2n+3}{n^4-4n+1}$ (f) $\dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n+1}$ (g) $\dfrac{5^n}{3^{n-1}2^{n+1}}$ (h) $\dfrac{n+3^n}{n^6+2^n}$

(i) $\dfrac{\sqrt{n}}{\log(n)}$ (j) $\dfrac{(-1)^n}{\log(n)}$ (k) $\dfrac{n!}{(2n)!}$

**bitte wenden!**

**Aufgabe 38**
Bestimmen Sie die Partialbruchzerlegung von

(a) $\dfrac{x^2 - x}{x^3 + x^2 - 17x + 15}$ (b) $\dfrac{x^2 - 2}{(x-2)(x+1)^3}$ (c) $\dfrac{2x - 1}{(x-1)^2(x^2+x+1)^3}$.

**Aufgabe 39**
Kreuzen Sie an, welche Aussagen wahr bzw. falsch sind. Für jede korrekte Antwort gibt es 0,5 Punkte. Für jede nicht korrekte Antwort gibt es 0,5 Punkte Abzug. Sie können nicht weniger als 0 Punkte für diese Aufgabe erhalten.

| | | |
|---|---|---|
| Die Folge $(a_n)$ ist genau dann konvergent, wenn $(a_n + a_n)$ konvergiert. | ☐wahr | ☐falsch |
| Es seien $(a_n)$ und $(b_n)$ reelle Folgen. Falls $(a_n \cdot b_n)$ konvergiert, so konvergieren auch $(a_n)$ und $(b_n)$. | ☐wahr | ☐falsch |
| Es seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ Funktionen. Falls $f$ und $f + g$ differenzierbar sind, so ist auch $g$ differenzierbar. | ☐wahr | ☐falsch |
| Für $s \in \mathbb{R}$ mit $s > 1$ konvergiert $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$. | ☐wahr | ☐falsch |
| Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$ ist stetig. | ☐wahr | ☐falsch |
| Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann ist $F(x) := \int_a^x f(t)dt$ nicht notwendigerweise stetig. | ☐wahr | ☐falsch |