Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Repetitorium Lineare Algebra 2019

Blatt 4

Aufgabe 15
Bestimmen Sie jeweils den Rang der folgenden Matrizen mit Einträgen aus $\mathbb{R}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 16
Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen mit Einträgen in $\mathbb{R}$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 4 & -3 \\ 2 & -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 & 9 \\ 0 & 7 & 10 & 3 & 17 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & -1 \\ 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & \alpha \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 17
Es sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Vorgelegt sei ein lineares Gleichungssystem

$$Ax = b.$$

Wir setzen voraus, dass $\det(A) \neq 0$ gilt.

(a) Was gilt für die Lösbarkeit dieses LGS?

(b) Ist A invertierbar?

(c) Bilden die Spaltenvektoren eine Basis des $\mathbb{R}^n$?

(d) Welchen Rang hat A?

Wie lauten die Antworten, wenn $\det(A) = 0$ gilt?

Aufgabe 18
Die Leibnizsche Determinatenformel für $A \in K^{n \times n}$ mit $n \in \mathbb{N}$ und Körper K lautet

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{j=1}^{n} a_j^{\sigma(j)}.$$

Schreiben Sie diese Formel explizit aus für $n = 3$.

bitte wenden

Aufgabe 19
Es seien K ein Körper und $A, B \in K^{m\times n}$ mit $m, n \in \mathbb{N}$ und $m < n$. Eine der folgenden Aussagen ist immer richtig, die andere gilt nicht immer. Geben Sie für die richtige Aussage einen Beweis, für die falsche ein Gegenbeispiel.

(i) $\det(A^T B) = 0$

(ii) $\det(AB^T) = 0$.

Aufgabe 20
Es sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}_{>0}$. Zeigen Sie, ausgehend von den Eigenschaften D1 (Linearität), D2 (Alterniertheit) und D3 (Normiertheit) der Determinantenfunktion

$$\det : K^{n\times n} \to K,$$

dass diese auch die Eigenschaften D4, D5, D7, D8, D9 und D11 besitzt.
Hier sind diese noch einmal aufgeführt. Es seien $A, B \in K^{n\times n}$.

(D4) $\forall \lambda \in K$ gilt $\det(\lambda \cdot A) = \lambda^n \det(A)$

(D5) Hat A eine Nullzeile, so ist $\det(A) = 0$.

(D7) Entsteht B aus A durch Addition der λ-fachen j-ten Zeile zur i-ten Zeile ($i \neq j$), so ist $\det(A) = \det(B)$.

(D8) Ist A eine obere Dreiecksmatrix, also

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & \\ & \ddots & \vdots \\ \text{\Large 0} & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

so gilt $\det(A) = \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n$.

(D9) Sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ und A eine Matrix von der Gestalt

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & C \\ \text{\Large 0} & A_2 \end{pmatrix}$$

wobei A_1, A_2 quadratische Matrizen seien.
Dann gilt $\det(A) = \det(A_1) \cdot \det(A_2)$.

(D11) Es gilt $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$.