Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Repetitorium Lineare Algebra 2019

## Blatt 5

### Aufgabe 21

Gegeben sei eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 2 \\ 0 & -1 & -8 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

(a) Wie lautet das charakteristische Polynom $\chi_A$ von $A$?

(b) Begründen Sie, warum die Nullstellen von $\chi_A$ die Eigenwerte von $A$ sind.

(c) Bestimmen Sie die Eigenwerte von $A$ mit den dazugehörigen Eigenvektoren.

(d) Für $B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ gelte $\chi_B = \chi_A$. Gilt dann auch $B = A$?

### Aufgabe 22

Entscheiden Sie, ob die folgenden Matrizen $A, B$ und $C \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ diagonalisierbar sind und geben Sie gegebenenfalls die zugehörige Diagonalmatrix an. Begründen Sie Ihre Antworten.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

### Aufgabe 23

Es sei $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_5^{3\times 3}$.

(a) Bestimmen Sie $A^{10}$.

(b) Bestimmen Sie eine reguläre Matrix $S \in \mathbb{F}_5^{3\times 3}$, so dass $S^{-1}AS$ eine Diagonalmatrix ist.

### Zusatzaufgabe 1

Es sei $V = \mathbb{F}_2^3$ der dreidimensionale Standardvektorraum über dem endlichen Körper $\mathbb{F}_2$. Eine lineare Abbildung

$$\varphi : V \to V$$

sei gegeben durch

$$\varphi((1,0,0)^T) = (1,1,1)^T, \quad \varphi((0,1,0)^T) = (0,1,1)^T, \quad \varphi((0,0,1)^T) = (1,0,0)^T.$$

(a) Geben Sie die Darstellungsmatrix von $\varphi$ und Basen von $\ker \varphi$ und $\mathrm{im}\varphi$ an. Verifizieren Sie die Dimensionsformel

$$\dim \ker \varphi + \dim \mathrm{im}\varphi = \dim V.$$

(b) Berechnen Sie die Verkettung $\psi = \varphi^2 = \varphi \circ \varphi$. Welche Dimension haben Kern und Bild von $\psi$? Wie sieht $\varphi^3$ aus?