Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Repetitorium Lineare Algebra 2019

Blatt 6

Aufgabe 24
Es seien V ein K-Vektorraum und $U_1, U_2 \subseteq V$ Untervektorräume von V. Zeigen Sie:

(a) $U_1 \cup U_2$ ist genau dann ein Untervektoraum, wenn $U_1 \subseteq U_2$ oder $U_2 \subseteq U_1$ gilt.

(b) $U_1 + U_2 := \{x + y | x \in U_1, y \in U_2\}$ ist ein Untervektorraum von V.

Aufgabe 25
Entscheiden Sie, ob jeweils $\mathbb{R}^2$ die direkte Summe der folgenden W_1 und W_2 ist:

(a) $W_1 = \mathbb{R}^2$ und $W_2 = \{0\}$ (b) $W_1 = W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$

(c) $W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\}$ und $W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\}$

(d) $W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\}$ und $W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} \mid y \in \mathbb{R} \right\}$

Aufgabe 26
Bestimmen Sie ein Komplement U' zum Untervektorraum

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \right\rangle$$

des $\mathbb{R}^3$.

Aufgabe 27
Es seien V ein K-Vektorraum, U ein Untervektorraum und $v, v' \in V$. Zeigen Sie

(a) $v + U = v' + U \Leftrightarrow v - v' \in U$.

(b) Die Skalarmultiplikation des Quotientenvektorraums V/U gegeben durch

$$\begin{aligned} K \times V/U &\to V/U \\ (\alpha, (v + U)) &\mapsto \alpha v + U \end{aligned}$$

ist wohldefiniert.

Aufgabe 28
Es sei V ein Vektorraum über den Körper K und $f \in \mathrm{End}(V)$. Ferner definieren wir

$$f^2 := f \circ f \text{ und } f^3 := f \circ f^2.$$

Zeigen Sie, dass

$$\begin{aligned} f' : \ker f^3 / \ker f^2 &\to \ker f^2 / \ker f \\ x + \ker f^2 &\mapsto f(x) + \ker f \end{aligned}$$

eine wohldefinierte Abbildung ist. Sie dürfen verwenden, dass der Kern einer linearen Abbildung die Unterraumaxiome erfüllt.