Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Repetitorium Lineare Algebra 2019

Lösungen Testfragen

Aufgabe 1 Lösung: (c) $\det A = 55$

Aufgabe 2 Lösung: (f) S_n hat $n!$ Elemente

Aufgabe 3 Lösungen: (a), (c), (e)

Aufgabe 4 Lösungen: (c), (e), (f)

Aufgabe 5 Lösungen: (c), (d), (e)

Aufgabe 6 Lösungen: (b), (d), (f)
Welche der folgenden reellen Vektorräume sind isomorph zu $\mathbb{R}^4$?
Zu (c): Der Raum aller reellen Polynome vom Grad ≤ 4 ist 5-dimensional und nicht 4-dimensional: Oft werden hier die absoluten Glieder vergessen.

Zu (d): Der Kern der linearen Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}$, mit $(x_1, \ldots, x_5) \mapsto x_1 + x_2 + \ldots + x_5$ ist 4-dimensional und damit isomorph zu $\mathbb{R}^4$: Die Bedingung $\varphi((x_1, \ldots, x_5)) = 0$ ist äquivalent zu $x_1 = -(x_2 + x_3 + x_4 + x_5)$. Die vier Variablen der rechten Seite sind frei wählbar. Daher ist die Dimension des Kerns gleich 4.

Aufgabe 7 Lösungen: (d), (e), (f)
Wir weisen zunächst auf mehrdeutige Notation hin. Sei $\varphi \in \mathrm{End}(V)$ mit V endlicher $\mathbb{R}$-Vektorraum und $V \neq 0$. Wir setzen

$$\varphi^2 := \varphi \circ \varphi.$$

Also bedeutet φ^2 die zweifache Ausführung der Abbildung φ. Für $\varphi(x) = x$ gilt nun $\varphi^2(x) = x$ und damit $\varphi^2(x) \neq x^2$.

Wir betrachten nun $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\psi := \varphi^9 + \varphi^4.$$

Zu (a): Dann ist die Implikation

$$\varphi \text{ injektiv } \Rightarrow \psi \text{ injektiv}$$

falsch. Wir betrachten hierzu $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto -x$. Diese Abbildung ist offenbar injektiv. Nun gilt

$$\psi(x) = \varphi^9(x) + \varphi^4(x) = -x + x = 0.$$

Die Nullabbildung ist nur für den Nullraum (welcher aber nach Voraussetzung hier ausgeschlossen ist) injektiv.

Zu (b): Mit dem gleichen Beispiel $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto -x$ zeigen wir auch, dass die Implikation

$$\varphi \text{ surjektiv } \Rightarrow \psi \text{ surjektiv}$$

falsch ist. φ ist surjektiv, aber ψ nicht.

Zu (c): Damit ist auch klar, dass die Implikation

$$\varphi \text{ bijektiv } \Rightarrow \psi \text{ bijektiv}$$

falsch ist.
Zu (d): Die Aussage

$$\psi \text{ injektiv } \Rightarrow \varphi \text{ injektiv}$$

ist wahr: Für den Beweis zeigen wir die äquivalente Aussage

$$\varphi \text{ nicht injektiv } \Rightarrow \psi \text{ nicht injektiv.}$$

Sei also φ nicht injektiv. Dann gibt es ein $a \neq 0$ mit $\varphi(a) = 0$. Aufgrund der Definition von ψ folgt für dasselbe $a \neq 0$, dass $\psi(a) = \varphi^8(\varphi(a)) + \varphi(x) = \varphi^7(\varphi(0)) + 0 = ... = 0$. Somit ist auch ψ nicht injektiv.

Zu (e): Die Aussage

$$\psi \text{ surjektiv } \Rightarrow \varphi \text{ surjektiv}$$

ist wahr. Analog zu (d) zeigen wir die äquivalente Aussage

$$\varphi \text{ nicht surjektiv } \Rightarrow \psi \text{ nicht surjektiv.}$$

Diese Implikation ist aufgrund der Definition von ψ klar.

Zu (f): Die Aussage

$$\psi \text{ bijektiv } \Rightarrow \varphi \text{ bijektiv}$$

ist wahr. Dies folgern wir sofort aus (d) und (e).

Aufgabe 8 Lösungen: (b), (c)
Sei $\mathbb{R}[x]$ der reelle Vektorraum der Polynome in einer Variable mit reellen Koeffizienten. Welche der folgenden Abbildungen von $\mathbb{R}[x]$ in sich selbst sind linear?

(a) $f \mapsto f^2$

(b) $f \mapsto g \cdot f$ für ein festes $g \in \mathbb{R}[x]$

(c) $f \mapsto f(1)$.

Zur Erinnerung: Eine Abbildung $\varphi : V \to W$ zwischen K-Vektorräumen heißt linear, wenn gilt $\varphi(v + \lambda w) = \varphi(v) + \lambda\varphi(w)$ für alle $v, w \in V$ und $\lambda \in K$.

Zu (a): Die Abbildung $\varphi : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x], f \mapsto f^2$ ist *nicht* linear. Denn für $f, g \neq 0$ gilt

$$\varphi(f + g) = f^2 + 2fg + g^2 = \varphi(f) + 2fg + \varphi(g) \neq \varphi(f) + \varphi(g).$$

Zu (b): Die Abbildung $\varphi : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x], f \mapsto g \cdot f$ mit festem $g \in \mathbb{R}[x]$ ist linear. Denn für $f, h \in \mathbb{R}[x], \lambda \in \mathbb{R}$ haben wir

$$\varphi(f + \lambda h) = g \cdot (f + \lambda h) = g \cdot f + g \cdot (\lambda h) = g \cdot f + \lambda \cdot (gh) = \varphi(f) + \lambda\varphi(h).$$

Zu (c): Die Abbildung $\varphi : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$ mit $\varphi(f) = f(1)$ ist linear. Denn wir haben

$$\varphi(f + \lambda g) = (f + \lambda g)(1) = f(1) + \lambda g(1) = \varphi(f) + \lambda\varphi(g)$$

für alle $f, g \in \mathbb{R}[x]$ und $\lambda \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 9 Lösungen: (c), (d), (f)
Sei $(b_1, \dots, b_n)$ eine Basis des $\mathbb{Q}$-Vektorraums $V, n \geq 2$. Zu entscheiden ist, welche angegebenen Endomorphismen invertierbar sind. Für diese Aufgabe (und im allgemeinen) ist die folgende Aussage wichtig:

Die Spaltenvektoren der Darstellungsmatrix M_φ einer linearen Abbildung $\varphi : V \to W$ zwischen K-Vektorräumen sind die Bilder der Basisvektoren von V.

Zu (a): Aus der Bedingung $\varphi_1(b_k) = (2-k)b_k, k = 1, \dots, n$ folgt, dass die Darstellungsmatrix wie folgt aussieht:

$$M_{\varphi_1} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 0 & & & \text{\Large 0} \\ & & -1 & & \\ & & & \ddots & \\ \text{\Large 0} & & & & 2-n \end{pmatrix}$$

Bis auf die Einträge auf der Hauptdiagonalen sind alle Einträge 0. Ein Eintrag auf der Hauptdiagonalen ist 0. Somit ist die Determinante von M_{φ_1} gleich 0, d.h. die Matrix ist nicht invertierbar, was gleichbedeutend dazu ist, dass φ_1 nicht invertierbar ist.

Zu (b): Aus der Bedingung $\varphi_2(b_k) = b_{k+1}, k = 1, \dots, n-1$ und $\varphi_2(b_n) = b_2$ folgt, dass die erste Spalte der Darstellungsmatrix mit ihrer n-ten Spalte übereinstimmt. Also hat die Matrix keinen vollen Rang und ist daher nicht invertierbar.

Zu (c): Aus der Bedingung $\varphi_3(b_k) = (2+k)b_k, k = 1, \dots, n$ folgt, dass die Darstellungsmatrix nur Einträge ungleich Null auf der Hauptdiagonalen hat und alle anderen Einträge sind Null. Ihre Determinante ist also ungleich Null, d.h. die Matrix ist invertierbar.

Zu (d): Aus der Bedingung $\varphi_4(b_k) = b_{k+1}, k = 1, \dots, n-1$ und $\varphi_4(b_n) = b_1$ folgt, dass die Spaltenvektoren der Darstellungsmatrix linear unabhängig sind, d.h. die Matrix ist invertierbar.

Zu (e): Aus den Bedingungen $\varphi_5(b_1) = b_2, \varphi_5(b_k) = 3b_k + b_{k+1}, k = 2, \dots, n-1$ und $\varphi_5(b_n) = b_n$ folgt, dass die Darstellungsmatrix eine untere Dreiecksmatrix ist. Die Einträge der Hauptdiagonalen von oben links nach unten rechts gelesen sind $0, 3, 1, 1 \dots, 1$. Also ist die Determinante Null und die Matrix ist nicht invertierbar.

Zu (f): Die Bedingungen $\varphi_6(b_1) = b_1$ und $\varphi_6(b_k) = k \cdot b_k - k^2 \cdot b_{k-1}, k = 2, \dots, n$ liefern eine Darstellungsmatrix, die eine obere Dreiecksmatrix ist. Überdies sind alle Einträge auf der Hauptdiagonalen ungleich Null, d.h. die Matrix ist invertierbar.

Aufgabe 10 Lösung: (c)
Wir verweisen auf die Vorbemerkung zur Aufgabe 9. Aus den Bedingungen $\varphi(b_i) = 2b_i + b_{i+1}, i = 1, \dots, n-1$ und $\varphi(b_n) = b_n$ folgt, dass die Darstellungsmatrix eine untere Dreiecksmatrix ist: Alle Einträge auf der Hauptdiagonalen sind 2 bis auf den letzten Eintrag unten rechts – dieser ist 1. (Direkt unterhalb der Hauptdiagonalen sind alle Einträge 1.) Demnach gilt $\det \varphi = 2^{n-1}$.

Aufgabe 11 Lösungen: (c), (f)

Wir wählen $K = V = W = \mathbb{R}$ und betrachten $f(x) = x$ und $g(x) = -x$. Dann gilt $\dim V = \dim W = 1$, $\mathrm{Rang}(f) = 1 = \mathrm{Rang}(g)$ und $\mathrm{Rang}(f+g) = 0$. Dieses Beispiel dient als Nachweis, dass die folgenden Aussagen falsch sind:

$$
\begin{array}{ll}
\text{(a)} & \mathrm{Rang}(f+g) \geq \mathrm{Rang}(f) \\
\text{(b)} & \mathrm{Rang}(f+g) = \mathrm{Rang}(f) + \mathrm{Rang}(g) \\
\text{(d)} & \mathrm{Rang}(f+g) \geq \mathrm{Rang}(f) + \mathrm{Rang}(g) \\
\text{(e)} & \mathrm{Rang}(f+g) \geq \dim W
\end{array}
$$

Für eine lineare Abbildung $f : V \to W$ gilt, dass $\mathrm{Rang}(f) \leq \dim V$: Die Dimension des Bildraumes kann nicht größer sein als die Dimension des Urbildraumes. Dies gilt natürlich auch für die lineare Abbildung $(f+g) : V \to W$, also ist die nachfolgende Aussage wahr:

$$\text{(f)} \quad \mathrm{Rang}(f+g) \leq \dim V.$$

Alternativ können wir auch mit der Dimensionsformel argumentieren: Es gilt

$$\dim V = \dim \ker(f+g) + \mathrm{Rang}(f+g) \Rightarrow \dim V \geq \mathrm{Rang}(f+g).$$

Auch die Aussage (c) ist wahr – es gilt

$$\mathrm{Rang}(f+g) \leq \mathrm{Rang}(f) + \mathrm{Rang}(g).$$

Sei $w \in \mathrm{im}(f+g)$. Dann existiert ein $v \in V$ mit $(f+g)(v) = w$, d.h. $f(v)+g(v) = w$. Es gilt $f(v) \in \mathrm{im}(f)$ und $g(v) \in \mathrm{im}(g)$, d.h. $f(v)$ lässt sich als Linearkombination einer Basis $\mathcal{A}$ von $\mathrm{im}(f)$. Analog lässt sich $g(v)$ als Linearkombination einer Basis $\mathcal{B}$ von $\mathrm{im}(g)$ darstellen. Folglich lässt sich jedes $w \in \mathrm{im}(f+g)$ als Linearkombination aller Vektoren aus $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ darstellen, d.h. die Basislänge von $\mathrm{im}(f+g)$ ist kleiner oder gleich der Summe der Basislängen von $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$, mit anderen Worten

$$\mathrm{Rang}(f+g) \leq \mathrm{Rang}(f) + \mathrm{Rang}(g).$$

Aufgabe 12 Lösung: (a)
Nachfolgend erklären wir, wie wir ohne viel rechnen, Matrizen ausschließen können, deren Quadrate keinen Rang 2 haben.

Zu (b), (c) und (f): Bei diesen Matrizen handelt es sich um obere bzw. untere Dreiecksmatrizen. Die Einträge auf der Hauptdiagonalen sind jeweils verschieden von Null. Also ist die Determinante jeweils verschieden von Null. Aufgrund des Determinantenmultiplikationssatzes sind die Determinanten der Quadrate jeweils verschieden von Null, d.h. sie haben jeweils den vollen Rang 3.

Zu (d): Die Matrix hat Rang 1. Ihr Quadrat kann daher keinen Rang 2 haben.

Zu (e): Wir erhalten

$$A_5^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 80 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

und damit $\mathrm{rang}(A_5^2) = 1$.

Zu (a): Wir erhalten

$$A_1^2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

also gilt $\text{Rang}(A_1^2) = 2$.

Aufgabe 13 Lösungen: (c), (d), (e), (f)
Zu (a), (e) und (f):
Es sei $\varphi \in \text{End}(\mathbb{R}^3)$ mit $\text{Rang}(\varphi) = 3$. Dann ist $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ bijektiv. Daher ist auch $\varphi^2 = \varphi \circ \varphi$ bijektiv, d.h. $\text{Rang}(\varphi^2) = 3$. Somit können die Folgen $(3, 2, 2, 1)$ und $(3, 2, 1, 0)$ für $(\text{Rang}(\varphi), \text{Rang}(\varphi^2), \text{Rang}(\varphi^3), \text{Rang}(\varphi^4))$ für kein $\varphi \in \text{End}(\mathbb{R}^3)$ auftreten. Hingegen kann $(3, 3, 3, 3)$ auftreten (in diesem Fall können wir beispielsweise $\varphi = \text{id}$ wählen).

Zu (b):
Angenommen, $\varphi \in \text{End}(\mathbb{R}^3)$ mit $\text{Rang}(\varphi) = 1$, dann ist $\dim \ker \varphi = 2$. Somit ist $\dim \ker \varphi^2 \geq 2$ (denn $\ker \varphi$ liegt stets in $\ker \varphi^2$ (warum gilt das?)), d.h. $\text{Rang}(\varphi^2) \leq 1$. Daher gibt es kein $\varphi \in \text{End}(\mathbb{R}^3)$ mit $(\text{Rang}(\varphi), \text{Rang}(\varphi^2), \text{Rang}(\varphi^3), \text{Rang}(\varphi^4)) = (1, 2, 1, 0)$.

Zu (c):
Sei $\varphi \in \text{End}(\mathbb{R}^3)$ mit Darstellungsmatrix $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Dann gilt $(\text{Rang}(\varphi), \text{Rang}(\varphi^2), \text{Rang}(\varphi^3), \text{Rang}(\varphi^4)) = (2, 1, 0, 0)$.

Zu (d):
Sei $\varphi \in \text{End}(\mathbb{R}^3)$ mit $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1, 0, 0)$.
Dann gilt $(\text{Rang}(\varphi), \text{Rang}(\varphi^2), \text{Rang}(\varphi^3), \text{Rang}(\varphi^4)) = (1, 1, 1, 1)$.

Aufgabe 14 Lösungen: (c), (d), (e), (f)
Zu (a): Die Bedingung $\dim \ker f = 2$ bedeutet (mit der Dimensionsformel), dass $\dim \text{im} f = 2$, also ist f nicht surjektiv, d.h. es gibt nicht notwendigerweise ein $x \in \mathbb{R}^4$ mit $f(x) = v$.

Zu (b): Gleiches Argument wie in (a).

Zu (c): Wir haben

$$f(y) = (3, 3, 6) = 3(1, 1, 2) \Rightarrow \tfrac{1}{3} f(y) = (1, 1, 2) \Rightarrow f(\tfrac{1}{3} y) = (1, 1, 2).$$

Zu (d) und (f): Die Aussagen $\dim \text{im} f = 3$ und $\dim \ker f = 1$ sind äquivalent und bedeuten, dass f surjektiv ist.

Zu (e): Wir betrachten eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$. Diese Abbildung kann nicht injektiv sein, da der Urbildraum 4-dimensional und der Bildraum höchstens 3-dimensional ist. Also ist die Aussage „f ist injektiv" stets falsch. Aus einer falschen Aussage können wir *alles* folgern, insbesondere auch, dass $f(x) = (1, 1, 2)$ eine Lösung in $\mathbb{R}^4$ besitzt. Insofern muss (e) als richtige Antwort mitangekreuzt werden. Aber: Betrachten wir hingegen eine lineare Abbildung $\widehat{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, so kann die Aussage „$\widehat{f}$ ist injektiv" wahr sein. Diese Bedingung ist dann aber *nicht* hinreichend, dass $\widehat{f}(x) = (1, 1, 2)$ eine Lösung besitzt!

Aufgabe 15 Lösung: (g)

Sei $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$. Hinsichtlich der Standardbasis gilt dann

$$\begin{aligned} X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} &= x_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= x_1 E_{11} + x_2 E_{12} + x_3 E_{21} + x_4 E_{22}. \end{aligned}$$

Ferner gilt für $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, dass

$$\gamma_A(X) := AXA^t = \begin{pmatrix} x_1 & 2x_1 \\ 2x_1 & 4x_1 \end{pmatrix} = x_1 E_{11} + 2x_1 E_{12} + 2x_1 E_{21} + 4x_1 E_{22}.$$

Wir erhalten daher

$$\begin{aligned} \gamma_A(E_{11}) &= 1E_{11} + 2E_{12} + 2E_{21} + 4E_{22} \\ \gamma_A(E_{12}) &= 0E_{11} + 0E_{12} + 0E_{21} + 0E_{22} \\ \gamma_A(E_{21}) &= 0E_{11} + 0E_{12} + 0E_{21} + 0E_{22} \\ \gamma_A(E_{22}) &= 0E_{11} + 0E_{12} + 0E_{21} + 0E_{22}. \end{aligned}$$

Die Spaltenvektoren der Darstellungsmatrix einer linearen Abbildung entsprechen den Bildern der Basisvektoren. Somit ist die gesuchte Darstellungsmatrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 16 Lösung: (e) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ hat Signum -1.

Eine Permutation kann in Zyklen zerlegt werden und hat genau dann Signum $+1$, wenn die Anzahl der Zyklen gerader Länge in der Zerlegung gerade ist. Wir illustrieren dies an den folgenden Permutationen.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ Die Permutation wird in zwei Zeilen darstellt: In der oberen Zeile stehen die Werte $\{1, \dots, n\}$ und in der zweiten Zeile darunter ihre jeweiligen Werte unter der Permutation. In dieser Darstellung lesen wir ab: $1 \mapsto 5, 5 \mapsto 3$ und $3 \mapsto 1$. Dies können wir kurz auch als Zyklus $(1\ 5\ 3)$ schreiben. Dieser Zyklus hat die Länge 3. Ebenso lesen wir ab: $2 \mapsto 2$, als Zyklus entspricht dies (2). Dies ist also ein Zyklus der Länge 1. Insgesamt erhalten wir die folgende Zerlegung der Permutation

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} = (1\ 5\ 3)(2)(4).$$

Diese Zerlegung enthält genau 0 Zyklen gerader Länge. Da 0 eine gerade Zahl ist, ist das Signum der Permutation $+1$.

(b) Wir haben

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} = (1\ 2)(3\ 4).$$

Also liegt eine Zerlegung von zwei Zyklen gerader Länge vor. Das Signum ist $+1$.

(c) Es gilt

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{bmatrix} = (1)(2\ 4\ 3).$$

Diese Zerlegung enthält genau 0 Zyklen gerader Länge. Da 0 eine gerade Zahl ist, ist das Signum der Permutation $+1$.

(d) Es gilt

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} = (1\ 4)(2\ 3).$$

Diese Zerlegung enthält genau zwei Zyklen der Länge 2. Also ist das Signum $+1$.

(e) Wir haben

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} = (1)(2\ 3).$$

Diese Zerlegung hat genau 1 Zyklus gerader Länge. Also ist das Signum -1.

(f) Wir haben

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} = (1\ 4)(2\ 5)(3).$$

Diese Zerlegung hat 2 Zyklen gerader Länge. Also ist das Signum $+1$.

Aufgabe 17 Lösung: (d) Es gilt $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Aufgabe 18 Lösungen: (a), (b)