Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Repetitorium Lineare Algebra 2020

Wiederholungsklausur WS 11/12
Aufgabe 2
c) Es sei V der $\mathbb{R}$-Vektorraum der Polynome P mit reellen Koeffizienten in einer rellen Variablen x mit $\deg(P) \leq n$, außerdem $D(P) = P'$, wobei P' die Ableitung von P nach x bezeichnet. Zeigen Sie, dass D eine lineare Transformation von V nach V ist und bestimmen Sie die Matrix von D bezüglich der (angeordneten) Standardbasis $\mathbb{B} := \{x^0, \ldots, x^n\}$ von V.
Beweis. Die Linearität von D ergibt sich aus den Ableitungsregeln (Stoff der Analysis): Für $f, g \in V$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt $(f+g)' = f' + g'$ und $(\lambda f)' = \lambda f'$. Geschrieben mit dem Operator D haben wir

$$D(f+g) = D(f) + D(g) \text{ und } D(\lambda f) = \lambda D(f).$$

Also ist D eine lineare Transformation von V nach V. Aus der Analysis (bzw. Schule) wissen wir, dass für $j \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$(x^j)' = j \cdot x^{j-1},$$

d.h.

$$\forall j = 0, 1, \ldots, n : D[x^j]_{\mathbb{B}} = j \cdot [x^{j-1}]_{\mathbb{B}}.$$

Hieraus ergibt sich, dass D eine $(n+1) \times (n+1)$-Matrix ist derart, dass alle Einträge $a_{ij}, j = i+1$ direkt über der Hauptdiagonalen verschieden von Null sind mit $a_{ij} := i$ und alle anderen gleich 0, d.h.

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & n-1 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

d) Es sei K ein Körper, V ein n-dimensionaler K-Vektorraum, ferner $\mathbb{B}$ Basis von V und $P \in \mathrm{Mat}_{n \times n}(K)$ invertierbar. Zeigen Sie: Es existiert eine Basis $\mathbb{B}'$ von V derart, dass $[x]_{\mathbb{B}'} = P \cdot [x]_{\mathbb{B}}$ für alle $x \in V$.
Beweis. Die Aussage ergibt sich sofort aus dem Basiswechseldiagramm

$$\begin{tikzcd} V_{\mathbb{B}} \arrow[rr, "P"] \arrow[dr, "B"'] & & V_{\mathbb{B}'} \arrow[dl, "B'"] \\ & V_{\mathcal{E}} & \end{tikzcd}$$

Im Diagramm bezeichnet B die Matrix deren Spaltenvektoren
aus den Vektoren aus $\mathbb{B}$ besteht. Damit ist B die Basiswechselmatrix, die Koordinaten bezüglich $\mathbb{B}$ auf Koordinaten bezüglich der Standardbasis $\mathcal{E}$ überführt. Offenbar ist B invertierbar, denn ihre Spaltenvektoren sind linear unabhängig. Wir setzen

$$B' := B \cdot P^{-1}.$$

Dann ist B' als Produkt von invertierbaren Matrizen selbst invertierbar. Ihre Spaltenvektoren sind die gesuchte Basis $\mathbb{B}'$.

Aufgabe 3 c) Es sei K ein endlicher Körper mit k Elementen, V ein n-dimensionaler Vektorraum über K. Bestimmen Sie (mit Beweis) die Anzahl der Elemente von V.
Lösung. V besitzt genau k^n Elemente. Es sei $\mathcal{B} = \{x_1, \dots, x_n\}$ eine Basis von V. Sei $v \in V$. Dann gilt

$$[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix},$$

d.h. jedes $v \in V$ lässt sich genau durch ein solches n-Tupel repräsentieren. Jede Koordinate des n-Tupels kann k Werte annehmen. Es gibt n Koordinaten. Also ist die Gesamtheit aller solcher n-Tupel gerade k^n, qed.

Aufgabe 4
c) Sei K ein Körper und V ein endlich dimensionaler K-Vektorraum, V^* der Dualraum zu V. Zeigen Sie: V und V^* sind isomorph.
Beweis. Die Aussage haben wir im Repetitorium bewiesen! Sei $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ eine Basis von V. Wir setzen $\mathcal{B}^* := \{\alpha_1^*, \dots, \alpha_n^*\}$ mit

$$\alpha_j^* := f_j(\alpha_j) := \delta_{ij},$$

wobei δ_{ij} das Kronecker-Symbol bezeichnet. Dann ist $\mathcal{B}^*$ eine Basis von V^*. Weitere Details siehe Repetitorium oder Skript.
d) Sei K ein Körper und V ein endlich dimensionaler K-Vektorraum, ferner U ein Unterraum von V. Zeigen Sie: Dann ist $\dim((U^\circ)^\circ) = \dim(U)$.
Beweis. Die Dimensionsformel für Annullatoren liefert

$$\dim(U^\circ) + \dim U = \dim V \text{ und } \dim((U^\circ)^\circ) + \dim(U^\circ) = \dim V^*.$$

Demnach gilt

$$\dim U = \dim V - \dim(U^\circ) \text{ und } \dim((U^\circ)^\circ) = \dim V^* - \dim(U^\circ).$$

Da $\dim V = \dim V^*$ folgt sofort die Behauptung.

Aufgabe 5
b) Sei $\mathbb{C}$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum der komplexen Zahlen, ferner $\mathbb{R}i$ der von $\{i\}$ aufgespannte Unterraum von V. Bestimmen Sie einen Isomorphismus zwischen $\mathbb{C}/\mathbb{R}i$ und $\mathbb{R}$.
Lösung. Der Homomorphiesatz besagt für jede lineare Abbildung $\varphi : V \to W$, dass $V/\ker(\varphi) \cong R_\varphi$ gilt. Wir suchen also eine lineare Abbildung

$$\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$

mit $\ker(\varphi) = \mathbb{R}i$ und $R_\varphi = \mathbb{R}$. Ein solcher ist wie folgt gegeben

$$\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$
$$z = a + ib \mapsto \mathrm{Re}(z) := a.$$

φ bildet also jede komplexe Zahl auf ihren Realteil ab. Dann gilt

$$\ker(\varphi) = \mathbb{R}i$$

(d.h. jede rein imaginäre Zahl wird auf 0 abgebildet) und

$$R_\varphi = \mathbb{R}$$

(dies ist klar, da ganz $\mathbb{R}$ getroffen wird). Mit dem Homomorphiesatz gilt also

$$\mathbb{C}/\mathbb{R}i \cong \mathbb{R},$$

ein entsprechender Isomorphismus ist gegeben durch

$$\overline{\varphi} : \mathbb{C}/\mathbb{R}i \to R_\varphi$$

mit $\overline{\varphi}(\overline{\alpha}) := \varphi(\alpha)$ für $\alpha \in \mathbb{C}$ (vgl. VL 27, Satz 2).

c) Es sei K ein Körper, V ein endlich dimensionaler K-Vektorraum und W ein Unterraum von V. Zeigen Sie, dass dann $(V/W)^* \cong W^\circ$ gilt.
Beweis. Nach der Dimensionsformel für Annullatoren gilt

$$\dim W^\circ + \dim W = \dim V \Rightarrow \dim W^\circ = \dim V - \dim W. \tag{1}$$

Es gilt

$$\dim(V/W)^* = \dim(V/W) = \dim V - \dim W. \tag{2}$$

Aus (1) und (2) folgt die Behauptung.