Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Repetitorium Lineare Algebra 2020

Behauptung:
Es seien K ein endlicher Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $A \in K^{n\times n}$. Dann gilt: A ist genau dann invertierbar, wenn es ein $k \in \mathbb{N}$ gibt mit $A^k = \mathbb{1}_n$.
Beweis: Wir zeigen zunächst folgenden **Satz**: Es sei $(G, \cdot)$ eine multiplikative Gruppe mit endlicher Menge G. Mit $1 \in G$ sei wie üblich das neutrale Element der Multiplikation bezeichnet. Für jedes $g \in G$ gibt es dann ein $k \in \mathbb{N}$, so dass

$$g^k = 1$$

gilt. Wir beweisen nun diesen Satz: $\{g^a | a \in \mathbb{N}\}$ ist die Menge aller Potenzen von g. Da G endlich ist, gibt es eine Wiederholung von Elementen – konkret: Es gibt $a, b \in \mathbb{N}$ mit $a < b$, so dass $g^a = g^b$ gilt. Daraus folgt

$$g^a \cdot 1 = g^a \cdot g^{b-a} = g^b.$$

Also gilt

$$g^{b-a} = 1.$$

Wir setzen $k := b - a$ und erhalten die Behauptung, also $g^k = 1$. □
„$\Rightarrow$“: Nach Vorlesung ist die Menge $\mathrm{GL}(K, n)$ der invertierbaren $(n \times n)$-Matrizen mit der Matrizenmultiplikation eine Gruppe. Das neutrale Element ist die Einheitsmatrix $\mathbb{1}_n$. Falls K endlich ist, so ist auch $\mathrm{GL}(K, n)$ endlich. Es sei A eine invertierbare $(n \times n)$-Matrix, d.h. $A \in \mathrm{GL}(K, n)$. Mit obigem Satz folgt: Es gibt ein $k \in \mathbb{N}$ mit $A^k = \mathbb{1}_n$.
„$\Leftarrow$“: Es sei $A \in K^{n\times n}$. Wir zeigen

$$\exists k \in \mathbb{N} : A^k = \mathbb{1}_n \Rightarrow A \text{ invertierbar.}$$

Hierfür zeigen wir die Kontraposition

$$A \text{ nicht invertierbar} \Rightarrow \forall k \in \mathbb{N} : A^k \neq \mathbb{1}_n.$$

Sei also A nicht invertierbar. Dies ist äquivalent zu $\det(A) = 0$. Mit dem Determinantenmultiplikationssatz $(\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B))$ folgt:

$$\forall k \in \mathbb{N} : \det(A^k) = 0^k = 0 \neq 1 = \det(\mathbb{1}_n).$$

Daraus folgt

$$\forall k \in \mathbb{N} : A^k \neq \mathbb{1}_n.$$