Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Repetitorium Lineare Algebra 2020

Aufgabe 11
Es sei $V = \mathbb{F}_2^3$ der dreidimensionale Standardvektorraum über dem endlichen Körper $\mathbb{F}_2$. Eine lineare Abbildung

$$\varphi : V \to V$$

sei gegeben durch

$$\varphi((1,0,0)^t) = (1,1,1)^t, \quad \varphi((0,1,0)^t) = (0,1,1)^t, \quad \varphi((0,0,1)^t) = (1,0,0)^t.$$

(a) Geben Sie Basen von Kern(φ) und Im(φ) an. Verifizieren Sie die Dimensionsformel

$$\dim \ker \varphi + \dim \mathrm{Im}\varphi = \dim V.$$

(b) Berechnen Sie die Verkettung $\psi = \varphi^2 = \varphi \circ \varphi$. Welche Dimension haben Kern und Bild von ψ? Wie sieht φ^3 aus?

Lösung.

(a) Die Darstellungsmatrix der Abbildung ist gegeben durch

$$M := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

denn die Spaltenvektoren der Darstellungsmatrix sind die Bilder der Basisvektoren. Das homogene Gleichungssystem, also

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} x = 0,$$

liefert $x_2 = -x_1$ und $x_3 = -x_1$ mit x_1 frei wählbar in $\mathbb{F}_2$. Wir beachten, dass in $\mathbb{F}_2$ das Inverse zu 1 das Element 1 selbst ist. Somit ist

$$\ker \varphi = \mathrm{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Das Bild von φ wird von den Spaltenvektoren von M erzeugt. Der dritte Spaltenvektor lässt sich als Summe der ersten beiden schreiben:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

dabei beachten wir, dass $1 + 1 = 0$ in $\mathbb{F}_2$ gilt. Wir können also den dritten Spaltenvektor aus dem Erzeugendensystem streichen. Sind die beiden verbleibenden Spaltenvektoren linear unabhängig, so haben wir eine Basis des Bildes gefunden – dies ist auch der Fall: Die ersten beiden Spaltenvektoren sind linear unabhängig. Damit gilt

$$\mathrm{Im}\varphi = \mathrm{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Insgesamt erhalten wir also $\dim\ker\varphi = 1$ und $\dim \mathrm{Im}\varphi = 2$; die Dimensionsformel gilt natürlich auch für diese lineare Abbildung

$$3 = \dim V = \dim\ker\varphi + \dim\mathrm{Im}\varphi = 1 + 2.$$

(b) Die Darstellungsmatrix zu ψ ist

$$M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Auch bei der Berechnung von M^2 ist beachten, dass $1 + 1 = 0$ in $\mathbb{F}_2$ gilt. Die Dimension des Bildes entspricht dem Zeilenrang. Dieser ist offenbar 1, also $\dim\psi = 1$. Nach der Dimensionsformel ist $\dim\ker\psi = 2$. Die Darstellungsmatrix zu φ^3 ist

$$M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Also entspricht φ^3 der Nullabbildung, d.h. alles wird auf die Null abgebildet, daher ist $\dim\ker\varphi^3 = 3$ und $\dim\mathrm{Im}\varphi^3 = 0$. □

Aufgabe 12

Die Menge $\{(1,3)^t, (2,1)^t, (4,7)^t\} \subset \mathbb{R}^2$ bildet ein Erzeugendensystem des $\mathbb{R}^2$.

(a) Finden Sie eine lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$\varphi((1,3)^t) = (-2,-1)^t, \quad \varphi((2,1)^t) = (-6,-3)^t, \quad \varphi((4,7)^t) = (-10,-5)^t.$$

indem Sie $\varphi((x,y)^t)$ für ein beliebiges $(x,y)^t \in \mathbb{R}^2$ angeben.

(b) Bestimmen Sie Bild und Kern von φ, indem Sie für beide Unterräume Basen angeben. Was ist $\ker\varphi \cap \mathrm{Im}\varphi$?

Lösung.

(a) Wir setzen

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt

$$v_3 = 2v_1 + v_2.$$

Ferner sind v_1 und v_2 linear unabhängig. Also sind v_1 und v_2 eine Basis des $\mathbb{R}^2$. Es gilt

$$\varphi\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x \cdot \varphi(e_1) + y \cdot \varphi(e_2),$$

wobei e_1 und e_2 die Standardbasisvektoren des $\mathbb{R}^2$ seien. Um die Abbildung für ein beliebiges $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ zu erhalten, bestimmen wir $\varphi(e_1)$ und $\varphi(e_2)$. Nach Voraussetzung gilt

$$\varphi\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \varphi(e_1) + 3 \cdot \varphi(e_2) = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

$$\varphi\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \cdot \varphi(e_1) + \varphi(e_2) = \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Aus (1) folgt

$$\varphi\left(e_1\right) = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} - 3 \cdot \varphi\left(e_2\right). \tag{3}$$

(3) in (2) liefert

$$2 \cdot \left(\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} - 3 \cdot \varphi\left(e_2\right) \right) + \varphi\left(e_2\right) = \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \end{pmatrix},$$

also

$$-5 \cdot \varphi(e_2) = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \varphi(e_2) = \tfrac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{4}$$

Die Gleichung (4) in (3) ergibt dann

$$\varphi(e_1) = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} - \tfrac{3}{5} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \tfrac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} -16 \\ -8 \end{pmatrix}.$$

Wir setzen

$$M = \tfrac{1}{5} \begin{pmatrix} -16 & 2 \\ -8 & 1 \end{pmatrix},$$

zu prüfen ist, ob

$$M \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ -5 \end{pmatrix}$$

gilt. Dies ist tatsächlich der Fall. Somit beschreibt

$$M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

die lineare Abbildung φ.

(b) Aus der Darstellungsmatrix

$$M = \tfrac{1}{5} \begin{pmatrix} -16 & 2 \\ -8 & 1 \end{pmatrix}$$

ergibt sich sofort, dass

$$\mathrm{Im}\varphi = \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

gilt. Lösen des homogenen Gleichungssystem ergibt

$$8x = y,$$

somit gilt

$$\ker\varphi = \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix} \right\}.$$

Für den Schnitt haben wir $\mathrm{Im}\varphi \cap \ker\varphi = \{0\}$. $\square$