**Aufgabe 26**
Es seien $U_1, U_2$ Unterräume eines **endlich dimensionalen** $K$-Vektorraums $V$. Zeigen Sie

(a) $(U_1 + U_2)^\circ = U_1^\circ \cap U_2^\circ$

(b) $(U_1 \cap U_2)^\circ = U_1^\circ + U_2^\circ$.

**Vorbemerkung**: In der Aufgabenstellung müssen wir für eine Inklusion bei Aussage (b) voraussetzen, dass $V$ endlich-dimensional ist. Die Aussage (a) gilt für einen beliebigen Vektorraum $V$. Die Aussage (b) gilt nur für endlich-dimensionale Vektorräume. Die Inklusion

$$(U_1 \cap U_2)^\circ \supset U_1^\circ + U_2^\circ$$

gilt für allgemeine Vektorräume. Die andere Inklusion

$$(U_1 \cap U_2)^\circ \subset U_1^\circ + U_2^\circ$$

nur für endlich-dimensionale Vektorräume.
**Beweis**: Definitionsgemäß ist der Annullator von $U$, bezeichnet mit $U^\circ$, diejenige Menge der linearen Funktionale, die auf $U$ verschwinden.

(a) „$\subset$": Es gelte $f \in (U_1+U_2)^\circ$, d.h. $f$ verschwindet für alle Vektoren aus $U_1+U_2$. Wegen $U_1 \subset U_1 + U_2$ folgt: $f$ verschwindet auf $U_1$, also gilt $f \in U_1^\circ$. Analog gilt $f \in U_2^\circ$. Also verschwindet $f$ in $U_1$ und $U_2$, d.h. $f \in U_1^\circ \cap U_2^\circ$.
„$\supset$": Es gelte $f \in U_1^\circ \cap U_2^\circ$. Dann verschwindet $f$ auf $U_1$ und $U_2$. Es sei nun $u \in U_1+U_2$. Zu zeigen ist $f(u) = 0$. Aber dies klar: Es gibt $u_1 \in U_1$ und $u_2 \in U_2$ mit $u = u_1+u_2$. Wir haben also $f(u) = f(u_1+u_2) = f(u_1)+f(u_2) = 0+0 = 0$.

(b) „$\supset$": Es gelte $f \in U_1^\circ + U_2^\circ$, d.h. es gibt $h_1 \in U_1^\circ$ und $h_2 \in U_2^\circ$ mit

$$f = h_1 + h_2.$$

Zu zeigen ist $f \in (U_1 \subset U_2)^\circ$, d.h. $f(\alpha) = 0$ für alle $\alpha \in U_1 \cap U_2$. Wir haben für $j = 1, 2$

$$h_j \in U_j^\circ \Leftrightarrow \forall \alpha \in U_j : h_j(\alpha) = 0.$$

Es sei daher $\alpha \in U_1 \cap U_2$. Dann gilt

$$f(\alpha) = h_1(\alpha) + h_2(\alpha) = 0 + 0 = 0,$$

dies war zu zeigen.
„$\subset$": Da $U_1, U_2$ endlich-dimensional sind, ist $U_1 \cap U_2$ endlich-dimensional mit Basis

$$\{\gamma_1, \dots, \gamma_r\},$$

die wir jeweils zu einer Basis

$$\{\alpha_1, \dots, \alpha_m, \gamma_1, \dots, \gamma_r\}$$

von $U_1$ und einer Basis

$$\{\beta_1, \dots, \beta_n, \gamma_1, \dots, \gamma_r\}$$

von $U_2$ und schließlich zu einer Basis

$$\{\alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta_1, \dots, \beta_n, \gamma_1, \dots, \gamma_r, \delta_1 \dots, \delta_s\}$$

für ganz $V$ ergänzen können. Jedes $v \in V$ lässt sich daher schreiben als

$$v = \sum_{j=1}^m a_j\alpha_j + \sum_{j=1}^n b_j\beta_j + \sum_{j=1}^r c_j\gamma_j + \sum_{j=1}^s d_j\delta_j$$

mit entsprechenden Körperelementen $a_j, b_j, c_j, d_j$. Für $f \in V^*$ gilt aufgrund der Linearität

$$f(v) = \sum_{j=1}^{m} a_j f(\alpha_j) + \sum_{j=1}^{n} b_j f(\beta_j) + \sum_{j=1}^{r} c_j f(\gamma_j) + \sum_{j=1}^{s} d_j f(\delta_j). \tag{1}$$

Es gelte nun $f \in (U_1 \cap U_2)^\circ$, d.h. $f$ verschwindet auf $U_1 \cap U_2$, d.h. $f(\gamma_j) = 0$ für jedes $j$ in (1) und wir erhalten

$$\begin{aligned} f(v) &= \sum_{j=1}^{m} a_j f(\alpha_j) + \sum_{j=1}^{n} b_j f(\beta_j) + \sum_{j=1}^{s} d_j f(\delta_j) \\ &= h_1(v) + h_2(v) \end{aligned}$$

mit

$$h_1(v) := \sum_{j=1}^{m} a_j f(\alpha_j) + \sum_{j=1}^{s} d_j f(\delta_j)$$

und

$$h_2(v) := \sum_{j=1}^{n} b_j f(\beta_j).$$

Wir zeigen nun $h_j \in U_j^\circ$. Daraus folgt dann $f \in U_1^\circ + U_2^\circ$. Es sei $\alpha \in U_1$. Dann gilt

$$\alpha = \sum_{j=1}^{m} a_j \alpha_j + \sum_{j=1}^{r} c_j \gamma_j \tag{2}$$

denn $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \gamma_1, \ldots, \gamma_r\}$ ist eine Basis von $U_1$ und wir erhalten

$$h_1(\alpha) = \underbrace{\sum_{j=1}^{m} a_j f(\alpha_j)}_{=0,(\blacktriangle)} + \underbrace{\sum_{j=1}^{s} d_j f(\delta_j)}_{=0,(\triangle)} = 0 + 0 = 0.$$

$(\blacktriangle)$ : nach Voraussetzung ist $f \in (U_1 \cap U_2)^\circ$

$(\triangle)$ : denn in (2) treten $\delta_j$ nicht auf

Also ist $h_1 \in U_1^\circ$.
Sei nun $\beta \in U_2$. Dann gilt mit der Voraussetzung

$$h_2(\beta) = \sum_{j=1}^{n} b_j f(\beta_j) = 0,$$

also ist $h_2 \in U_2^\circ$. Mithin gibt es $h_1 \in U_1^\circ$ und $h_2 \in U_2^\circ$ mit $f = h_1 + h_2$, qed.