Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Repetitorium Lineare Algebra 2020

Blatt 1

Aufgabe 1
Welche der folgenden Paare sind Gruppen? (Bitte Begründung angeben.)

(a) $(\mathbb{Q}\backslash\mathbb{Z}, +)$ (b) $(\mathbb{Q}, \cdot)$ (c) $(\mathbb{Q}, +)$

(d) $(\mathbb{Z}_2, +)$ (e) $(\{r + s\sqrt{2} \text{ mit } r, s \in \mathbb{Q}\}, \cdot)$

(f) $(V, +)$, wobei V die Menge der konvergenten Folgen in $\mathbb{R}$ bezeichne

Aufgabe 2

(a) Zeigen Sie: Ein rechts-neutrales Element $e \in G$ einer Gruppe $(G, \circ)$ ist auch links-neutral, d.h.
$$\forall g \in G : a \circ e = a \Rightarrow e \circ a = a.$$

(b) Zeigen Sie: Jedes Element einer Gruppe besitzt genau ein inverses Element.

Aufgabe 3
Es seien $0, 1, a \in \mathbb{Z}$, wobei 0 das neutrale Element bezüglich der gewöhnlichen Addition und 1 das neutrale Element bezüglich der gewöhnlichen Multiplikation in $\mathbb{Z}$ bezeichnen.

(a) Zeigen Sie
$$\forall a \in \mathbb{Z} : a \cdot 0 = 0.$$

(b) Zeigen Sie
$$(-1)^2 = 1.$$

(c) Formulieren Sie die folgende Aussage in Prosa
$$\forall a \in \mathbb{Z} : -a = (-1) \cdot a$$
und beweisen Sie sie.

(d) Zeigen Sie
$$\forall a \in \mathbb{Z} : a = -(-a).$$

Gelten die Aussagen, wenn $\mathbb{Z}$ durch $\mathbb{R}$ ersetzt wird?

Aufgabe 4
Beweisen Sie: Wir erhalten alle Lösungen eines inhomogenen linearen Gleichungssystems, indem wir zu einer speziellen Lösung dieses Systems alle Lösungen des zugehörigen homogenen System addieren.

Aufgabe 5
Bestimmen Sie die Lösungsmenge des folgenden linearen Gleichungssystems gegeben durch
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 22 \\ 6 & 7 & 8 & 40 \end{array}\right).$$
Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit der Aussage in Aufgabe 4.