Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Repetitorium Lineare Algebra 2020

Blatt 2

Aufgabe 6
Es sei $\varphi : V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen K-Vektorräumen. Zeigen Sie

(a) Das Bild R_φ ist ein Untervektorraum von W.

(b) Falls U ein Untervektorraum von W ist, so ist $f^{-1}(U)$ ein Untervektorraum von V.

(c) φ ist genau dann injektiv, wenn $\ker \varphi = \{0\}$.

Aufgabe 7
Welche der folgenden Teilmengen des $\mathbb{Q}^3$ sind Untervektorräume des $\mathbb{Q}^3$?

(a) $M_1 = \{(x, y, z)|xy - z = 0\}$

(b) $M_2 = \{(x, y, z)|x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$

(c) $M_3 = \{(x, y, z)|x^2 + y^4 = 0\}$

(d) $M_4 = \{(x, y, z)|x + 2y = 3z\}$

Aufgabe 8
Welche Aussagen ergeben sich aus dem folgenden Satz?

($*$) *Die Menge V der stetigen Funktionen von $D \subset \mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ bildet einen reellen Vektorraum.*

(a) Was ist der Nullvektor von V?

(b) Geben Sie einen weiteren Vektor $f \neq 0$ von V an. Hat f eine Richtung, eine Länge oder einen Betrag?

(c) Es seien $f, g \in V$. Was können wir dann über $f + g, f \cdot g$ und $f \circ f$ aussagen, wenn wir nur die Aussage ($*$) verwenden dürfen?

(d) Geben Sie mindestens zwei vom Nullraum verschiedene, echte Untervektorräume von V an.

(e) Geben Sie einen Vektorraum W mit $V \subsetneq W$ an.

(f) Ist die Menge der injektiven Funktionen von $D \subset \mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ ein reeller Vektorraum?

Aufgabe 9
Es sei $\mathcal{A}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ und $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$ mit

$$[v_1]_\mathcal{A} := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, [v_2]_\mathcal{A} := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } [v_3]_\mathcal{A} := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden.

(b) Sei $w \in \mathbb{R}^3$ mit $[w]_\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie die Koeffizienten von w bezüglich $\mathcal{B}$, d.h. bestimmen Sie $[w]_\mathcal{B}$.