Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Repetitorium Lineare Algebra 2020

Blatt 4

Aufgabe 13
Es seien V ein K-Vektorraum und $U_1, U_2 \subseteq V$ Untervektorräume von V. Zeigen Sie:

(a) $U_1 \cup U_2$ ist genau dann ein Untervektoraum, wenn $U_1 \subseteq U_2$ oder $U_2 \subseteq U_1$ gilt.

(b) $U_1 + U_2 := \{x + y | x \in U_1, y \in U_2\}$ ist ein Untervektorraum von V.

Aufgabe 14
Entscheiden Sie, ob jeweils $\mathbb{R}^2$ die direkte Summe der folgenden W_1 und W_2 ist:

(a) $W_1 = \mathbb{R}^2$ und $W_2 = \{0\}$ (b) $W_1 = W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$

(c) $W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\}$ und $W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\}$

(d) $W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\}$ und $W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} \mid y \in \mathbb{R} \right\}$

Aufgabe 15
Es seien V ein K-Vektorraum mit $\dim V = n \in \mathbb{N}$ sowie $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ Basen von V. Ferner sei $\mathcal{C} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ mit $v_j \in V, j = 1, \ldots, n$. Zeigen Sie: $\{[v_1]_{\mathcal{A}}, \ldots, [v_n]_{\mathcal{A}}\}$ ist genau dann linear unabhängig, wenn $\{[v_1]_{\mathcal{B}}, \ldots, [v_n]_{\mathcal{B}}\}$ linear unabhängig ist.

Aufgabe 16
Es sei $\{v_1, \ldots, v_n\}$ eine endliche Familie von Vektoren eines K-Vektorraums.
Wir betrachten die folgende Aussage:
$\{v_1, \ldots, v_n\}$ ist genau dann linear unabhängig, wenn $\{v_i, v_j\}$ für alle $i, j = 1, \ldots, n$ mit $i \neq j$ linear unabhängig ist.
Welche Richtung der Aussage gilt bzw. gilt nicht? Geben Sie für die gültige Richtung einen Beweis, für die falsche ein Gegenbeispiel.

Aufgabe 17
Beweisen Sie die Dimensionsformel: Sei $\varphi : V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen K-Vektorräumen und $\dim V < \infty$. Dann gilt

$$\dim R_\varphi + \dim \ker\varphi = \dim V.$$