Blatt 5

Aufgabe 18

Es seien V ein K-Vektorraum, U ein Untervektorraum und $v, v' \in V$. Zeigen Sie

(a) $v + U = v' + U \Leftrightarrow v - v' \in U$.

(b) Die Skalarmultiplikation des Quotientenvektorraums V/U gegeben durch

$$\begin{aligned} \cdot : K \times V/U &\to V/U \\ (\alpha, (v + U)) &\mapsto \alpha v + U \end{aligned}$$

ist wohldefiniert.

Aufgabe 19

Es sei V ein Vektorraum über den Körper K und $f \in \mathrm{End}(V)$. Ferner definieren wir

$$f^2 := f \circ f \text{ und } f^3 := f \circ f^2.$$

Zeigen Sie, dass

$$\begin{aligned} f' : \ker f^3 / \ker f^2 &\to \ker f^2 / \ker f \\ x + \ker f^2 &\mapsto f(x) + \ker f \end{aligned}$$

eine wohldefinierte Abbildung ist. Sie dürfen verwenden, dass der Kern einer linearen Abbildung die Unterraumaxiome erfüllt.

Aufgabe 20

Es seien V ein endlich dimensionaler K-Vektorraum und U ein Untervektorraum. Zeigen Sie, dass die kanonische Abbildung

$$\begin{aligned} \pi_U : V &\to V/U \\ v &\mapsto v + U \end{aligned}$$

linear ist. Was ist $\ker \pi_U$? Was ist $\dim V/U$?

Aufgabe 21

Beweisen Sie den Homomorphiesatz: Sei $\varphi : V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen endlich dimensionalen K-Vektorräumen. Dann gilt

$$V / \ker(\varphi) \cong R_\varphi.$$

Aufgabe 22

Wahr oder falsch?

(i) Jeder Ring ist ein Körper. ☐ wahr ☐ falsch

(ii) $\mathbb{Q}$ mit der gewöhnlichen Addition und Multiplikation ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.
☐ wahr ☐ falsch

(iii) Der Nullraum besitzt keine Basis. ☐ wahr ☐ falsch

(iv) Jede lineare Abbildung von einem endlich-dimensionalen K-Vektorraums V in sich selbst ist genau dann injektiv, wenn sie surjektiv ist. ☐ wahr ☐ falsch