Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Repetitorium Lineare Algebra 2020

Blatt 6

Aufgabe 23
Es sei K ein Körper. Zeigen Sie: Die linearen Funktionale $K^n \to K$ sind genau die Abbildungen

$$x \mapsto \sum_{j=1}^{n} c_j x_j,$$

mit $c_j \in K$.

Aufgabe 24
Es sei V ein K-Vektorraum und V^* sein Dualraum. Ferner sei $S \subseteq V$. Zeigen Sie, dass der Annihilator S° von S ein Unterraum von V^* ist.

Aufgabe 25
Es sei $W = \operatorname{span}\{(1,1,0),(1,0,1)\}$ ein Unterraum von $\mathbb{Q}^3$. Bestimmen Sie eine Basis des Annihilators W° von W.

Aufgabe 26
Es seien U_1, U_2 Unterräume eines endlich dimensionalen K-Vektorraums V. Zeigen Sie

(a) $(U_1 + U_2)^\circ = U_1^\circ \cap U_2^\circ$

(b) $(U_1 \cap U_2)^\circ = U_1^\circ + U_2^\circ$.

Aufgabe 27
Seien V, W vom Nullraum verschiedene, endlich dimensionale K-Vektorräume. Welche der folgenden Aussagen sind für alle Paare linearer Abbildungen $f, g : V \to W$ richtig?

(i) $\operatorname{Rang}(f+g) \geq \operatorname{Rang}(f)$

(ii) $\operatorname{Rang}(f+g) = \operatorname{Rang}(f) + \operatorname{Rang}(g)$

(iii) $\operatorname{Rang}(f+g) \leq \operatorname{Rang}(f) + \operatorname{Rang}(g)$

(iv) $\operatorname{Rang}(f+g) \geq \operatorname{Rang}(f) + \operatorname{Rang}(g)$

(v) $\operatorname{Rang}(f+g) \geq \dim W$

(vi) $\operatorname{Rang}(f+g) \leq \dim V$