Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Repetitorium Lineare Algebra 2020

## Blatt 7

### Aufgabe 28

Es sei $T : V \to W$ mit $V = \mathbb{R}^3$ und $W = \mathbb{R}^2$ eine lineare Abbildung mit Darstellungsmatrix

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

bezüglich der Standardbasen $\mathcal{E}_V$ und $\mathcal{E}_W$.

(a) Geben Sie die Dualbasen $\mathcal{E}_V^*$ und $\mathcal{E}_W^*$ an.

(b) Geben Sie die Darstellungsmatrix der dualen Abbildung

$$T^t : W^* \to V^*$$

bezüglich der Dualbasen $\mathcal{E}_W^*$ und $\mathcal{E}_V^*$ an.

(c) Sei $\varphi \in W^*$ mit

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto 5x + 7y.$$

Geben Sie $T^t(\varphi)$ an.

### Aufgabe 29

Es seien $V, V'$ und $V''$ jeweils $K$-Vektorräume. Zeigen Sie

(a) Für die identische Abbildung $\mathrm{id}_V : V \to V$ gilt

$$\mathrm{id}_V^t = \mathrm{id}_{V^*}$$

(b) Für lineare Abbildungen $f : V \to V'$ und $g' : V \to V''$ gilt

$$(g \circ f)^t = f^t \circ g^t.$$

(c) Ist $f : V \to W$ ein Isomorphismus, dann ist $f^t$ ein Isomorphismus und es gilt

$$(f^t)^{-1} = (f^{-1})^t.$$

### Aufgabe 30

Es sei $T : V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen $K$-Vektorräumen. Zeigen Sie

(a) $(R_T)^\circ = \ker(T^t)$

(b) $(\ker(T))^\circ = R_{T^t}$

(c) Sind $V$ und $W$ endlich-dimensional, so gilt $\mathrm{Rang}(T^t) = \mathrm{Rang}(T)$

(d) $T$ ist injektiv $\Leftrightarrow$ $T^t$ ist surjektiv

(e) $T$ ist surjektiv $\Leftrightarrow$ $T^t$ ist injektiv