Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Lineare Algebra Übungsaufgaben

Aufgabe 1
Berechnen Sie jeweils den Wert der Determinante der folgenden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 5 & 3 \\ 5 & 1 & 7 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 & 9 \\ 0 & 7 & 10 & 3 & 17 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & -1 \\ 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2
Sei V ein $\mathbb{Q}$-Vektorraum mit Basis $\mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_n\}, n > 2$. Sei $\varphi : V \to V$ die lineare Abbildung mit

$$\varphi(b_i) = 2b_i + b_{i+1}, i = 1, \ldots, n-1$$
$$\varphi(b_n) = b_n.$$

Welchen Wert hat $\det[\varphi]_{\mathcal{B}}$?

Aufgabe 3
Sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum, $V \neq 0$, und sei $\varphi : V \to V$ eine lineare Abbildung. Definiere $\psi : V \to V$ durch

$$\psi := \varphi^9 + \varphi^4.$$

Welche der folgenden Implikationen sind richtig?

(a) φ injektiv $\Rightarrow$ ψ injektiv

(b) φ surjektiv $\Rightarrow$ ψ surjektiv

(c) φ bijektiv $\Rightarrow$ ψ bijektiv

(d) ψ injektiv $\Rightarrow$ φ injektiv

(e) ψ surjektiv $\Rightarrow$ φ surjektiv

(f) ψ bijektiv $\Rightarrow$ φ bijektiv

Aufgabe 4
Es seien V, W endlich dimensionale Vektorräume über den Körper K, $\varphi : V \to W$ eine lineare Abbildung und ferner $\{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis von V. Beweisen oder widerlegen Sie

(a) $\{\varphi(v_1), \ldots, \varphi(v_n)\}$ ist ein Erzeugendensystem von W.

(b) $\{\varphi(v_1), \ldots, \varphi(v_n)\}$ ist linear unabhängig in W.

Aufgabe 5
Sei V ein $\mathbb{Q}$-Vektorraum und $x_1, \dots, x_r, y \in V$. Ferner gelte $y \notin \langle x_1, \dots, x_r \rangle$. Zeigen Sie: Ist $\{x_1, \dots, x_r\}$ linear unabhängig, so auch $\{x_1 + y, \dots, x_r + y\}$.

Aufgabe 6
Sei $V = \{f \in \mathbb{R}[t] : \deg f \leq 2\}$ ein Untervektorraum von $\mathbb{R}[t]$. Zeigen Sie, dass es für jedes $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ genau ein $f \in V$ gibt mit

$$f(1) = a \qquad f'(0) = b \qquad f(0) = c$$

und geben Sie dieses f explizit an. Mit f' ist die Ableitung von f bezeichnet.

Aufgabe 7
Wahr oder falsch?

(i) Es gibt einen endlichen Körper mit genau 8 Elementen. ☐ wahr ☐ falsch

(ii) Jeder endlich-dimensionale K-Vektorraum V ist isomorph zu seinem Dualraum V^*.
☐ wahr ☐ falsch

(iii) Sei V ein K-Vektorraum. Dann gibt eine Teilmenge $S \subset V$, so dass der Annullator S^0 kein Vektorraum ist. ☐ wahr ☐ falsch

(iv) Die Determinante ist für jede $(m \times n)$-Matrix mit $m, n \in \mathbb{N}$ erklärt.
☐ wahr ☐ falsch

(v) Es seien $A, B \in K^{n \times n}$ mit K Körper und $n \in \mathbb{N}_{>0}$. Falls B aus A durch eine Zeilenvertauschung hervorgeht, so gilt $\det(A) = -\det(B)$.
☐ wahr ☐ falsch