Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Vorkurs Mathematik 2013
Dr. D.K. Huynh

Blatt 1

Aufgabe 1
Berechnen Sie

$$(a+b)^3$$

und

$$(a+b)^4.$$

Aufgabe 2
Finden Sie ganze Zahlen m, n mit

$$\text{(a)} \quad \frac{m}{3} + \frac{n}{5} = \frac{1}{15} \qquad \text{(b)} \quad \frac{m}{k} + \frac{n}{k+1} = \frac{1}{k(k+1)}.$$

Aufgabe 3
Finden Sie jeweils eine explizite Darstellung der Folge,

(a) die im Wechsel die Werte 0 und 1 annimmt:

$$0, 1, 0, 1, \ldots$$

(b) in der sich die Sequenz $-1, 1, 1$ immer wiederholt:

$$-1, 1, 1, -1, 1, 1, \ldots$$

Aufgabe 4
Beweisen Sie mit dem Satz des Pythagoras: In einem rechtwinkligen Dreieck ist die Summe der Flächeninhalte der Halbkreise über den Katheten gleich dem Flächeninhalt des Halbkreises über der Hypotenuse.

Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Vorkurs Mathematik 2013
Dr. D.K. Huynh

Blatt 2

Aufgabe 5
Schreiben Sie die Summe aus

(a) $\sum_{j=1}^{5} j^2$ (b) $\sum_{j=-3}^{1} \frac{1}{j+4}$ (c) $\sum_{j=1}^{3} x^j$ (d) $\sum_{j=1}^{3} \frac{a}{j}$ (e) $\sum_{k=0}^{n} x^k$.

Aufgabe 6
Fassen Sie als Summe zusammen

(a) $1+3+5+\ldots+99+101$ (b) $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{512}+\frac{1}{1024}$.

Aufgabe 7
Berechnen Sie den Wert der Summe

(a) $\sum_{j=1}^{55} j$ (b) $\sum_{j=1}^{10} 1$ (c) $\sum_{k=1}^{2013} \frac{1}{k(k+1)}$.

Tipp: Verwenden Sie bei Aufgabenteil (c) die Aufgabe 2 (b).

Aufgabe 8
Gitta Gans schließt zum 1. Januar 2013 einen Banksparplan für ein Jahr ab. Sie zahlt immer zum Monatsersten 100 Euro ein. Auf ihre Einzahlungen erhält sie einen garantierten Zinssatz von 2 Prozent p.a.

(a) Wieviel Zinsen erhält sie am Ende des Jahres?

(b) Wieviel Zinsen erhält sie am Ende des Jahres, wenn die Bank einen Zinssatz von p Prozent p.a. zahlt?

Hinweis: Ein Bankjahr hat 360 Tage und ein Bankmonat 30 Tage. Führen Sie Ihre Berechnungen auf Grundlage von Bankjahr und Bankmonat durch.

Aufgabe 9

(a) Sei $x \in \mathbb{R}$ und $x \neq 1$. Beweisen Sie (vgl. Aufgabe 5 (e)) die geometrische Summenformel:
$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}.$$

(b) Bekanntlich hat ein Schachbrett 64 Felder. Auf das 1. Feld wird nun 1 Reiskorn gelegt, auf das 2. Feld 2 Reiskörner, auf das 3. Feld 4 Reiskörner, usw. Auf ein Feld kommt jeweils doppelt soviel wie auf das vorangegangene; dabei vernachlässigen wir, dass die Felder wohlmöglich zu klein für die Reiskörner werden. Berechnen Sie die exakte Anzahl der Reiskörner auf dem Schachbrett.

(c) Welchen Wert hat die Summe (vgl. Aufgabe 6 (b))
$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{512}+\frac{1}{1024}?$$

Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Vorkurs Mathematik 2013
Dr. D.K. Huynh

Blatt 3

Aufgabe 10
Es bezeichne $(\mathbb{Z}_7^*, \cdot)$ die multiplikative Gruppe der Restklassen bezüglich der Division durch 7. Geben Sie für jedes Element das inverse Element an.

Aufgabe 11
Es sei $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl. Zudem seien $3n + 1$ und $4n + 1$ Quadratzahlen. Zeigen Sie, dass n durch 8 teilbar ist.

Aufgabe 12
Nutzen Sie Ihre Kenntnisse über Teilbarkeitslehre und zeigen Sie, dass die Gleichung

$$3987^{12} + 4365^{12} = 4472^{12}$$

falsch und daher kein Gegenbeispiel des *Großen Fermatschen Satzes* ist.

Aufgabe 13
Kann man aus 100 beliebig gegebenen ganzen Zahlen *stets* 15 Zahlen derart auswählen, dass die Differenz zweier beliebiger dieser 15 Zahlen durch 7 teilbar ist? Beweisen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 14
Der Weihnachtsmann bewahrt die Geschenke in einem riesigen Safe auf. Dieser ist durch ein Zahlenschloss gesichert. Die Kombination besteht aus einer 10stelligen Zahl. Um diese nicht zu vergessen, wählt er eine Kombination mit den folgenden Regeln aus (so dass er sie gegebenfalls rekonstruieren kann):

(i) Jede Ziffer 0, 1,..., 9 tritt genau einmal auf.

(ii) Fasst man die ersten j Ziffern von links nach rechts als eine Zahl auf, so ist sie durch j teilbar $(1 \leq j \leq 10)$.

Es gibt genau eine Kombination, die diese Regeln gleichzeitig erfüllt. Wie lautet sie?

Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Vorkurs Mathematik 2013
Dr. D.K. Huynh

Blatt 4

Aufgabe 15
Berechnen Sie

$$\text{(a)}\quad \frac{\frac{3}{2}+\frac{5}{7}}{\frac{2}{3}+\frac{7}{5}} \qquad \text{(b)}\quad \frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}{\frac{1}{3+6}} \qquad \text{(c)}\quad 0{,}\overline{5}+0{,}\overline{9}+0{,}\overline{2013}.$$

Aufgabe 16
Berechnen Sie

$$\text{(a)}\quad \sum_{k\geq 1}\frac{1}{10^k} \qquad \text{(b)}\quad \sum_{k\geq 1}\frac{1+(-1)^k}{2}\frac{1}{10^k}.$$

Aufgabe 17
Eine Unsitte ist es, die Gültigkeit folgender Identität für $a, b \in \mathbb{R}-\{0\}$ anzunehmen:

$$\frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}.$$

Beweisen Sie, dass es keine $a, b \in \mathbb{R} - \{0\}$ gibt, die diese Gleichung erfüllen.

Aufgabe 18
Beweisen Sie

(a) $\sqrt{3}$ ist keine rationale Zahl (b) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ ist keine rationale Zahl.

Aufgabe 19
(Knobelaufgabe, vgl. Blatt 3, Aufgabe 11) Es sei $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl. Zudem seien $3n+1$ und $4n+1$ Quadratzahlen. Zeigen Sie, dass n durch 7 teilbar ist.

Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Vorkurs Mathematik 2013
Dr. D.K. Huynh

Blatt 5

Aufgabe 20

Der *Goldene Schnitt* ist ein bestimmtes Teilungsverhältnis einer Strecke, das als besonders ästhetisch empfunden wird. Dabei verhält sich die gesamte Strecke mit Länge $a + b$ zur längeren Teilstrecke mit Länge a wie die Teilstrecke mit Länge a zur kürzeren Teilstrecke mit Länge b. Dieses Verhältnis

$$\Phi := \frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$$

wird als Goldener Schnitt bezeichnet. Bestimmen Sie den Goldenen Schnitt Φ.

Aufgabe 21

Gegeben sei das Polynom

$$p(x) = x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 14x + 24.$$

Begründen Sie, warum rationale Nullstellen von $p(x)$ ganzzahlig sein müssen. Bestimmen Sie die Nullstellen von $p(x)$ und geben Sie seine Linearfaktorzerlegung an.

Aufgabe 22

Wir betrachten die Gleichung

$$x^3 - 6x^2 + 7x - 6 = 0. \tag{1}$$

(a) Zeigen Sie, dass die Gleichung (1) keine rationale Lösung x haben kann.

(b) Vor rund 500 Jahren entdeckte *del Ferro* eine analytische Lösungsformel für kubische Gleichungen der Form

$$x^3 + ax + b = 0.$$

Setzen wir

$$D := \left(\frac{a}{3}\right)^3 + \left(\frac{b}{2}\right)^2,$$

so lautet del Ferros Lösungsformel

$$x = \sqrt[3]{-\frac{b}{2} + \sqrt{D}} + \sqrt[3]{-\frac{b}{2} - \sqrt{D}}.$$

Benutzen Sie diese Lösungsformel, um alle reellen Lösungen von (1) zu bestimmen.

Aufgabe 23

Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, so dass gilt

$$x^2 + (\sqrt{3} - \sqrt{2})x = \sqrt{6}.$$

Benutzen Sie hierzu quadratische Ergänzung und vereinfachen Sie Ihre Lösung unter Ausnutzung der Identität

$$\sqrt{2} + \sqrt{3} = \sqrt{2\sqrt{6} + 5}.$$

Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Vorkurs Mathematik 2013
Dr. D.K. Huynh

Blatt 6

Aufgabe 24
Familie Zeppelin zahlt an der Kinokasse für zwei Erwachsene, zwei Studenten und zwei Kindern zusammen 34,40€. Familie Ellenrieder zahlt für einen Erwachsenen, einen Studenten und drei Kindern zusammen 27,20€. Schließlich zahlt Großfamilie Wessenberg für drei Erwachsene, sieben Studenten und vier Kindern zusammen 78,60€. Bestimmen Sie die Einzeleintrittspreise für Erwachsene, Studenten und Kinder.

Aufgabe 25
Für alle $n \in \mathbb{N} > 0$ existieren $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$, so dass gilt

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = an^4 + bn^3 + cn^2 + dn + e.$$

Stellen Sie für $n = 1, 2, 3, 4, 5$ die entsprechende Gleichung auf. Bestimmen Sie mit dem so definierten linearen Gleichungssystem die Werte von a, b, c, d und e.

Aufgabe 26
Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie, falls es Sinn macht, die folgende Produkte

(a) AB (b) BA (c) CA
(d) $\frac{1}{3}A$ (e) $(\frac{1}{3}A)^2$ (f) $(\frac{1}{3}A)^{2013}$.

Aufgabe 27
Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass $A^2 \neq 0$, aber $A^3 = 0$ gilt. Geben Sie ein Beispiel für eine (4×4)-Matrix B an, so dass $B^3 \neq 0$, aber $B^4 = 0$ gilt.

Aufgabe 28
Geben Sie je ein Beispiel von zwei (2×2)-Matrizen A und B an mit $A \neq B$, so dass gilt

(a) $AB \neq BA$ (b) $AB = BA$.

Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Vorkurs Mathematik 2013
Dr. D.K. Huynh

Blatt 7

Aufgabe 29
Gegeben sei

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ und $\det(M) \neq 0$. Ferner sei

$$L = \frac{1}{\det(M)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie LM. Was stellen Sie fest? Nutzen Sie Ihre Beobachtung, um das lineare Gleichungssystem

$$Mx = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

zu lösen.

Aufgabe 30
Beweisen Sie mit den Anordnungsaxiomen:

(a) Aus $x, y, a \in \mathbb{R}$ mit $x < y$ und $a < 0$ folgt $ax > ay$.

(b) Für jede reelle Zahl $x \neq 0$ gilt $x^2 > 0$.

Aufgabe 31
Folgern Sie aus der Dreiecksungleichung:

(a) Für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ gilt

$$|x + y + z| \leq |x| + |y| + |z|.$$

(b) Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$|x + y| \geq |x| - |y|.$$

Aufgabe 32
Es seien a und b nichtnegative reelle Zahlen. Wir nennen $\frac{a+b}{2}$ das arithmetische Mittel und $\sqrt{ab}$ das geometrische Mittel von a und b. Zeigen Sie, dass das geometrische Mittel stets kleiner-gleich dem arithmetischen Mittel ist, also

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a + b}{2}.$$

Aufgabe 33
Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden Ungleichungen

$$\text{(a)} \quad -7x \geq \frac{3(x-1)}{2} \qquad \text{(b)} \quad x^2 + x - 6 \leq 0 \qquad \text{(c)} \quad |x + 2| < 7.$$

Aufgabe 34
Gegeben seien die folgenden Ungleichungen

$$\text{(i)} \quad x + 4y \leq 400 \qquad \text{(ii)} \quad 2x + y \leq 170 \qquad \text{(iii)} \quad 0 \leq x \leq 65 \qquad \text{(iv)} \quad y \geq 0.$$

Skizzieren Sie alle Punkte (x, y) im $\mathbb{R}^2$, die gleichzeitig alle Ungleichungen erfüllen.

Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Vorkurs Mathematik 2013
Dr. D.K. Huynh

Blatt 8

Aufgabe 35
In Aufgabe 25 haben Sie gezeigt, dass

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^4 + 2n^3 + n^2}{4}$$

für $n = 1, 2, 3, 4$ und 5 gilt. Zeigen Sie nun mit vollständiger Induktion, dass diese Identität für alle $n \in \mathbb{N} > 0$ gilt, d.h. für die Summe der ersten n Kubikzahlen gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^4 + 2n^3 + n^2}{4}.$$

Aufgabe 36
Die Verallgemeinerung der Aussage von Aufgabe 31 (a) lautet

$$(\forall n \in \mathbb{N}^+)(\forall a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R})(|a_1 + a_2 + \ldots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n|).$$

Beweisen Sie diese mittels vollständiger Induktion.

Aufgabe 37
Beweisen Sie:

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \left[(n \geq 9) \Rightarrow (2^n > 4n^2 + 1)\right].$$

Aufgabe 38
Beweisen Sie:

$$4^n + 15n - 1$$

ist für alle $n \in \mathbb{N}$ durch 9 teilbar.

Aufgabe 39
Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} k! \cdot k = (n+1)! - 1.$$

Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Vorkurs Mathematik 2013
Dr. D.K. Huynh

Blatt 9

Aufgabe 40
Bestimmen Sie Betrag, Argument, Real- und Imaginärteil der komplexen Zahl $z \in \mathbb{C}$:

$$\text{(a)} \quad z = \frac{1+\sqrt{3}i}{2} \qquad \text{(b)} \quad z = \frac{1-i}{1+i} \qquad \text{(c)} \quad z = i^n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\text{(d)} \quad z = (1+i)^{2013} \qquad \text{(e)} \quad z = \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^n, n \in \mathbb{Z}.$$

Aufgabe 41
Bestimmen Sie alle $z \in \mathbb{C}$ mit

$$\text{(a)} \quad z^2 + z + 1 = 0 \qquad \text{(b)} \quad z^3 - 2z^2 + z - 2 = 0.$$

Aufgabe 42
Beweisen Sie

(a) die Additionstheoreme, d.h. für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y,$$
$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y.$$

Benutzen Sie hierzu die Eulersche Formel $e^{ix} = \cos x + i \sin x$.

(b) für alle $n \in \mathbb{N}$ mit vollständiger Induktion

$$(\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i \sin nx,$$

wobei $x, y \in \mathbb{R}$. Benutzen Sie hierbei die Additionstheoreme *ohne* Verwendung der Eulerschen Formel.

Aufgabe 43
Zeigen Sie, dass $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ mit der gewöhnlichen Multiplikation eine abelsche Gruppe ist.

Aufgabe 44
Skizzieren Sie die folgenden Mengen in der komplexen Zahlenebene

$$\text{(a)} \quad M = \{z \in \mathbb{C} : 1 \leq |z| \leq 2\} \qquad \text{(b)} \quad M = \left\{z \in \mathbb{C} : \frac{\pi}{4} < \arg(z) < \frac{\pi}{2}\right\}.$$

Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Vorkurs Mathematik 2013
Dr. D.K. Huynh

Blatt 10

Aufgabe 45
Gegeben sei die Folge

$$a_n = \frac{3n^3 + 1}{n^3} \text{ mit Grenzwert } a.$$

Es sei $\varepsilon_0 = 0{,}001$. Ab welchem Folgenindex liegen die Folgenglieder in der ε_0-Umgebung von a?

Aufgabe 46
Bestimmen Sie den Grenzwert der Folge

(a) $$a_n = \frac{2013n^2 + 9n + 17}{n^2 - 1701}$$ (b) $$a_n = \frac{3^n + 4^n}{3^{n+1} + 4^{n+1}}.$$

Aufgabe 47
Zeigen Sie, dass die Folge

$$a_n = \frac{1 + (-1)^n}{2}$$

divergiert.

Aufgabe 48
Bestimmen Sie den Grenzwert von

$$a_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}.$$

Aufgabe 49
Zeigen Sie

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n!} = 0.$$

Aufgabe 50
Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente Folgen mit Grenzwerten

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n \text{ und } b = \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Zeigen Sie, dass die Summenfolge $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert mit

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b.$$

Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Vorkurs Mathematik 2013
Dr. D.K. Huynh

Blatt 11

Aufgabe 51
Untersuchen Sie auf Konvergenz und berechnen Sie gegebenenfalls den Wert der Reihe

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2013n-4}$ (b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^k}$ (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{4n^2-1}$.

Aufgabe 52
Ein Fahrradfahrer fährt mit einer konstanten Geschwindigkeit v auf seinem Fahrrad vom Punkt A auf geradem Weg zum 1 km entfernten Punkt B. Als er losfährt, sitzt bei ihm eine Fliege auf der Nase, die sich daraufhin auch in Bewegung setzt. Mit der doppelten Geschwindigkeit fliegt sie ebenfalls in Richtung B. Als sie an Punkt B angekommen ist, dreht sie sofort um und fliegt wieder zurück auf die Nase des Fahrradfahrers, um dann aber direkt wieder in Richtung B zu fliegen. Dies setzt sie solange fort bis der Fahrradfahrer und sie gemeinsam an Punkt B ankommen. Welche Strecke hat die Fliege dann zurückgelegt?

Aufgabe 53
Es seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Funktionen gegeben durch $f(x) = x+1$ und $g(x) = x^2$. Wenden Sie, geeignet oft, Komposition von Funktionen und/oder algebraische Operationen auf f und g an und stellen Sie so dar:

(a) die identische Abbildung $\mathrm{id} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(b) die Funktion
$$p(x) = \frac{1}{1-x}$$
für $|x| < 1$.

Aufgabe 54
Die Zackenfunktion $z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei definiert durch
$$z(x) = \mathrm{abs}\left(\mathrm{entier}\left(x + \frac{1}{2}\right) - x\right),$$
dabei bezeichnet $\mathrm{abs}(x)$ den Absolutbetrag von x und $\mathrm{entier}(x)$ die Gauß-Klammer von x. Zeichnen Sie den Graphen von z und zeigen Sie:

(a) Für $|x| \leq \frac{1}{2}$ gilt $z(x) = \mathrm{abs}(x)$.

(b) z hat die Periode 1, d.h. es gilt $z(x+n) = z(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{Z}$.

Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Vorkurs Mathematik 2013
Dr. D.K. Huynh

Blatt 12

Aufgabe 55
Prüfen Sie die folgenden Funktionen auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität. Beweisen Sie Ihre Antworten.

(a) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit
$$f(n) = 2n + 1$$

(b) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit
$$g(x) = \begin{cases} x & \text{falls } x < 0 \\ (x-1)^3 & \text{falls } x \geq 0 \end{cases}$$

(c) $h : (0,1) \to \mathbb{R}^+$ mit
$$h(x) = \frac{1-x}{x}.$$

Aufgabe 56
Zeigen Sie, dass die Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ abzählbar unendlich ist, indem sie eine bijektive Abbildung $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ angeben. Weisen Sie nach, dass ihre Funktion f tatsächlich bijektiv ist.

Aufgabe 57
Es seien X, Y und Z Mengen. Ferner seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ Funktionen. Beweisen Sie die folgenden Aussagen

(a) Wenn f und g injektiv sind, so ist auch $g \circ f$ injektiv.

(b) Wenn f und g surjektiv sind, so ist auch $g \circ f$ surjektiv.

Aufgabe 58
Es seien X und Y Mengen. Es sei $f : X \to Y$ eine Funktion. Verneinen Sie die folgenden Aussagen

(a) $(\forall x_1 \in X)(\forall x_2 \in X)[f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2]$

(b) $(\forall y \in Y)(\exists x \in X)[f(x) = y]$.

Aufgabe 59
Informieren Sie sich über Cantors erstes Diagonalargument und wie es benutzt wird, um nachzuweisen, dass $\mathbb{Q}$ abzählbar ist.

Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Vorkurs Mathematik 2013
Dr. D.K. Huynh

Blatt 13

Aufgabe 60
Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf Stetigkeit und beweisen Sie jeweils Ihre Aussagen:

(a) $f(x) = \begin{cases} x, & \text{falls } x < 0 \\ (x-1)^3, & \text{falls } x \geq 0 \end{cases}$ (b) $g(x) = \begin{cases} \frac{x^2-9}{x-3}, & \text{falls } x \neq 3 \\ A, & \text{falls } x = 3. \end{cases}$

Aufgabe 61
Die Dirichletsche Sprungfunktion ist gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{falls } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass $f(x)$ nirgends stetig ist.

Aufgabe 62
Zeigen Sie, dass die nachfolgende Formel eine stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{x^2 + \pi} \right)^n .$$

Aufgabe 63
Zeigen Sie für $1 \leq k \leq n$, dass gilt

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

Aufgabe 64
Wie lautet der Koeffizient von $x^{18}y^5z^7$, wenn der Term

$$(x+y)^{17}(x+z)^{13}$$

ausmultipliziert wird?

Aufgabe 65
Es sei X eine Menge mit n Elementen. Ferner bezeichne $\mathcal{P}(X)$ ihre Potenzmenge – dies ist die Menge aller Teilmengen von X. Bestimmen Sie $|\mathcal{P}(X)|$.

Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Vorkurs Mathematik 2013
Dr. D.K. Huynh

Blatt 14

Aufgabe 66
Bestimmen Sie die Ableitung folgender Funktionen

(a) $f(x) = 3x - x^2$ (b) $g(x) = \dfrac{x}{1-x^2}$ (c) $h(x) = \sqrt[3]{x^4+5}$

(d) $j(x) = \pi(x - \sqrt{x})^{2013}$ (e) $k(x) = \dfrac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}, x \neq 0.$

Aufgabe 67
Es seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen. Beweisen Sie die Produktregel der Differentiation, d.h.

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x).$$

Aufgabe 68
Beweisen Sie das notwendige Kriterium für das Vorliegen eines Extremums: Die Funktion $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ habe in $x \in (a, b)$ ein lokales Extremum und sei in x differenzierbar. Dann gilt $f'(x) = 0$.

Aufgabe 69
Sei $f : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar an der Stelle $a \in D$. Zeigen Sie, dass f stetig in a ist.

Aufgabe 70
Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $a > 0$. Ferner sei die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \frac{1}{ax+b}.$$

Beweisen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$, dass die n-te Ableitung von f die folgende Form hat

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{a^n \cdot n!}{(ax+b)^{n+1}}.$$

Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Vorkurs Mathematik 2013
Dr. D.K. Huynh

Blatt 15

Aufgabe 71

Untersuchen Sie, ob für die folgenden Mengen das Supremum und das Infimum existiert und geben Sie sie gegebenenfalls an:

(a) $M = \mathbb{N}$ (b) $M = \mathbb{R}$ (c) $M = \left\{ \frac{n}{n+1} \text{ mit } n \in \mathbb{N} \right\}$

(d) $M = \{\sin(x) \text{ mit } x \in \mathbb{R}\}$ (e) $M = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - x = 1\}$

(f) $M = \left\{ \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} \text{ mit } n \in \mathbb{N} \right\}$.

Aufgabe 72

Es sei entier : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Ganzzahlfunktion. Bestimmen Sie

$$\int_0^{100} \text{entier}(x)dx.$$

Aufgabe 73

Es sei $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^3$.

(a) Wählen Sie eine äquidistante Partition P des Intervalls $I = [0, 1]$ und bestimmen Sie sowohl die Untersumme $U(P)$ und die Obersumme $O(P)$ von $f(x)$ in I. Verwenden Sie hierzu die Summenformel (vgl. Blatt 8, Aufgabe 35) für die ersten n Kubikzahlen

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^4 + 2n^3 + n^2}{4}.$$

(b) Benutzen Sie Ihre Resultate aus (a), um das Unterintegral und Oberintegral von $f(x)$ zu bestimmen. Geben Sie damit

$$\int_0^1 f(x)dx$$

an.

Aufgabe 74

Es seien $f(x)$ die Dirichletsche Sprungfunktion (vgl. Blatt 13, Aufgabe 61) und P eine Partition des Intervalls $I \subset \mathbb{R}$. Bestimmen Sie die Untersumme und Obersumme von P. Begründen Sie, warum $f(x)$ auf I nicht Riemann-integrierbar ist.

Aufgabe 75

Bestimmen Sie

$$\int_{-2}^{2} \sin^3(x)dx.$$

Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Vorkurs Mathematik 2013
Dr. D.K. Huynh

Blatt 16

Aufgabe 76
Bestimmen Sie

(a) $\int (4x^3 + \sqrt{2}x^2 - 17x + 1)dx$ (b) $\int \sum_{k=0}^{n} x^k dx$ (c) $\int_0^2 x \exp(x) dx$

(d) $\int \cos(3x + 4)dx$ (e) $\int 2x\sqrt{1 + x^2}dx$ (f) $\int_1^2 \sin^2(x)dx$

(g) $\int_1^2 \ln(x)dx.$

Aufgabe 77
Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion definiert durch

$$x \mapsto \int_4^{\sin(x)} \exp(t^2)dt.$$

Begründen Sie die Existenz der Ableitung von f und berechnen Sie diese.

Aufgabe 78
Bestimmen Sie alle differenzierbaren Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = f'(x) \text{ und } f(0) = 1.$$

Weisen Sie nach, dass Sie tatsächlich alle Lösungen gefunden haben.

Aufgabe 79
Es seien A und B zwei Aussagen. Beweisen Sie

$$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B.$$

Aufgabe 80
Die Loszettel einer Lotterie enthalten sämtliche neunstelligen Zahlen, die mit den Ziffern 1, 2, 3 gebildet werden können; dabei steht auf jedem Loszettel genau eine Zahl. Es gibt nur rote, gelbe und blaue Loszettel. Zwei Losnummern, die sich an allen neun Stellen unterscheiden, stehen stets auf Zetteln verschiedener Farbe. Jemand zieht ein rotes Los und ein gelbes Los; das rote Los hat die Nummer 122 222 222, das gelbe Los hat die Nummer 222 222 222. Der Hauptgewinn fällt auf das Los mit der Nummer 123 123 123. Welche Farbe hat es? Beweisen Sie die Richtigkeit Ihrer Antwort.