Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Vorkurs Mathematik 2013
Dr. D.K. Huynh

Blatt 3

Aufgabe 10
Es bezeichne $(\mathbb{Z}_7^*, \cdot)$ die multiplikative Gruppe der Restklassen bezüglich der Division durch 7. Geben Sie für jedes Element das inverse Element an.

Aufgabe 11
Es sei $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl. Zudem seien $3n + 1$ und $4n + 1$ Quadratzahlen. Zeigen Sie, dass n durch 8 teilbar ist.

Aufgabe 12
Nutzen Sie Ihre Kenntnisse über Teilbarkeitslehre und zeigen Sie, dass die Gleichung

$$3987^{12} + 4365^{12} = 4472^{12}$$

falsch und daher kein Gegenbeispiel des *Großen Fermatschen Satzes* ist.

Aufgabe 13
Kann man aus 100 beliebig gegebenen ganzen Zahlen *stets* 15 Zahlen derart auswählen, dass die Differenz zweier beliebiger dieser 15 Zahlen durch 7 teilbar ist? Beweisen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 14
Der Weihnachtsmann bewahrt die Geschenke in einem riesigen Safe auf. Dieser ist durch ein Zahlenschloss gesichert. Die Kombination besteht aus einer 10stelligen Zahl. Um diese nicht zu vergessen, wählt er eine Kombination mit den folgenden Regeln aus (so dass er sie gegebenfalls rekonstruieren kann):

(i) Jede Ziffer 0, 1,..., 9 tritt genau einmal auf.

(ii) Fasst man die ersten j Ziffern von links nach rechts als eine Zahl auf, so ist sie durch j teilbar ($1 \leq j \leq 10$).

Es gibt genau eine Kombination, die diese Regeln gleichzeitig erfüllt. Wie lautet sie?