



Blatt 9

Aufgabe 40

Bestimmen Sie Betrag, Argument, Real- und Imaginärteil der komplexen Zahl $z \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad z &= \frac{1 + \sqrt{3}i}{2} & \text{(b)} \quad z &= \frac{1 - i}{1 + i} & \text{(c)} \quad z &= i^n, n \in \mathbb{Z} \\ \text{(d)} \quad z &= (1 + i)^{2013} & \text{(e)} \quad z &= \left(\frac{1 + i}{\sqrt{2}} \right)^n, n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Aufgabe 41

Bestimmen Sie alle $z \in \mathbb{C}$ mit

$$\text{(a)} \quad z^2 + z + 1 = 0 \quad \text{(b)} \quad z^3 - 2z^2 + z - 2 = 0.$$

Aufgabe 42

Beweisen Sie

(a) die Additionstheoreme, d.h. für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} \cos(x + y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y, \\ \sin(x + y) &= \sin x \cos y + \cos x \sin y. \end{aligned}$$

Benutzen Sie hierzu die Eulersche Formel $e^{ix} = \cos x + i \sin x$.

(b) für alle $n \in \mathbb{N}$ mit vollständiger Induktion

$$(\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i \sin nx,$$

wobei $x, y \in \mathbb{R}$. Benutzen Sie hierbei die Additionstheoreme *ohne* Verwendung der Eulerschen Formel.

Aufgabe 43

Zeigen Sie, dass $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ mit der gewöhnlichen Multiplikation eine abelsche Gruppe ist.

Aufgabe 44

Skizzieren Sie die folgenden Mengen in der komplexen Zahlenebene

$$\text{(a)} \quad M = \{z \in \mathbb{C} : 1 \leq |z| \leq 2\} \quad \text{(b)} \quad M = \left\{ z \in \mathbb{C} : \frac{\pi}{4} < \arg(z) < \frac{\pi}{2} \right\}.$$