



Blatt 12

Aufgabe 55

Prüfen Sie die folgenden Funktionen auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität. Beweisen Sie Ihre Antworten.

(a) $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ mit

$$f(n) = 2n + 1$$

(b) $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{falls } x < 0 \\ (x - 1)^3 & \text{falls } x \geq 0 \end{cases}$$

(c) $h : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}^+$ mit

$$h(x) = \frac{1 - x}{x}.$$

Aufgabe 56

Zeigen Sie, dass die Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ abzählbar unendlich ist, indem sie eine bijektive Abbildung $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ angeben. Weisen Sie nach, dass ihre Funktion f tatsächlich bijektiv ist.

Aufgabe 57

Es seien X, Y und Z Mengen. Ferner seien $f : X \rightarrow Y$ und $g : Y \rightarrow Z$ Funktionen. Beweisen Sie die folgenden Aussagen

(a) Wenn f und g injektiv sind, so ist auch $g \circ f$ injektiv.

(b) Wenn f und g surjektiv sind, so ist auch $g \circ f$ surjektiv.

Aufgabe 58

Es seien X und Y Mengen. Es sei $f : X \rightarrow Y$ eine Funktion. Verneinen Sie die folgenden Aussagen

(a) $(\forall x_1 \in X)(\forall x_2 \in X)[f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2]$

(b) $(\forall y \in Y)(\exists x \in X)[f(x) = y].$

Aufgabe 59

Informieren Sie sich über Cantors erstes Diagonalargument und wie es benutzt wird, um nachzuweisen, dass $\mathbb{Q}$ abzählbar ist.