



Blatt 15

Aufgabe 71

Untersuchen Sie, ob für die folgenden Mengen das Supremum und das Infimum existiert und geben Sie sie gegebenenfalls an:

- (a) $M = \mathbb{N}$ (b) $M = \mathbb{R}$ (c) $M = \left\{ \frac{n}{n+1} \text{ mit } n \in \mathbb{N} \right\}$
 (d) $M = \{\sin(x) \text{ mit } x \in \mathbb{R}\}$ (e) $M = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - x = 1\}$
 (f) $M = \left\{ \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} \text{ mit } n \in \mathbb{N} \right\}.$

Aufgabe 72

Es sei $\text{entier} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die Ganzzahlfunktion. Bestimmen Sie

$$\int_0^{100} \text{entier}(x) dx.$$

Aufgabe 73

Es sei $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^3$.

- (a) Wählen Sie eine äquidistante Partition P des Intervalls $I = [0, 1]$ und bestimmen Sie sowohl die Untersumme $U(P)$ und die Obersumme $O(P)$ von $f(x)$ in I . Verwenden Sie hierzu die Summenformel (vgl. Blatt 8, Aufgabe 35) für die ersten n Kubikzahlen

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^4 + 2n^3 + n^2}{4}.$$

- (b) Benutzen Sie Ihre Resultate aus (a), um das Unterintegral und Oberintegral von $f(x)$ zu bestimmen. Geben Sie damit

$$\int_0^1 f(x) dx$$

an.

Aufgabe 74

Es seien $f(x)$ die Dirichletsche Sprungfunktion (vgl. Blatt 13, Aufgabe 61) und P eine Partition des Intervalls $I \subset \mathbb{R}$. Bestimmen Sie die Untersumme und Obersumme von P . Begründen Sie, warum $f(x)$ auf I nicht Riemann-integrierbar ist.

Aufgabe 75

Bestimmen Sie

$$\int_{-2}^2 \sin^3(x) dx.$$