Vorlesung 15

Integralrechnung

15.1 Supremum und Infimum

Zunächst ein paar grundlegende, wichtige Definitionen.

Definition 15.1.1. Eine Menge $M \subset \mathbb{R}$ heißt nach oben beschränkt, wenn es ein $s \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $x \leq s$ für alle $x \in M$. M ist nach unten beschränkt, wenn es ein $s \in \mathbb{R}$ gibt mit $s \leq x$ für alle $x \in M$.

Definition 15.1.2 (Supremum und Infimum)**.** $s \in \mathbb{R}$ heißt *Supremum* der Menge $M \subset \mathbb{R}$, falls s die kleinste obere Schranke von M ist, d.h.

(i) s ist eine obere Schranke

(ii) Ist $s' < s$, so ist s' keine obere Schranke.

Es gibt höchstens ein solches s. Im Existenzfall schreiben wir $s = \sup(M) = \sup M$.

Analog heißt $s \in \mathbb{R}$ *Infimum* der Menge M, wenn s die größte untere Schranke ist, d.h.

(i) s ist untere Schranke von M

(ii) $s' > s$ ist keine untere Schranke von M.

Im Existenzfall schreiben wir $s = \inf(M) = \inf M$.

Beispiel: Sei $M = (a, b)$. Dann gilt: $\inf(M) = a$ und $\sup(M) = b$. Dabei gilt, dass $\sup(M) \notin M$ und $\inf(M) \notin M$.

Bemerkung. Gilt $\sup(M) \in M$, bzw. $\inf(M) \in M$, dann sprechen wir vom *Maximum* bzw. *Minimum*. Wir schreiben $\max(M)$ und $\min(M)$.

Beispiele:

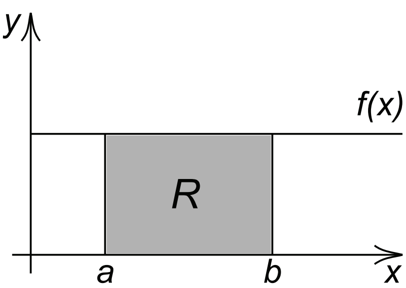
- Es sei $M = \{1, 4\}$, dann gilt: $\inf(M) = \min(M) = 1$ und $\sup(M) = \max(M) = 4$.
- Es sei $M = \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}_{>0}\} = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\}$, dann gilt: $\sup(M) = \max(M) = 1$, und $\inf(M) = 0$. Das Infimum liegt nicht in der Menge, also existiert das Minimum nicht.

15.2 Flächeninhalt und Integral einfacher Funktionen

Gegeben sei nun eine konstante Funktion $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$; $x \mapsto c$ mit $a < b$. Fassen wir f als eine Kostenfunktion auf, so können wir nach den Gesamtkosten $G_{[a,b]}$ im Intervall $[a, b]$ fragen. Diese entsprechen gerade dem Flächeninhalt des Rechtecks R.

$$R = G_{[a,b]} = (b - a) \cdot c.$$

Hier heißt

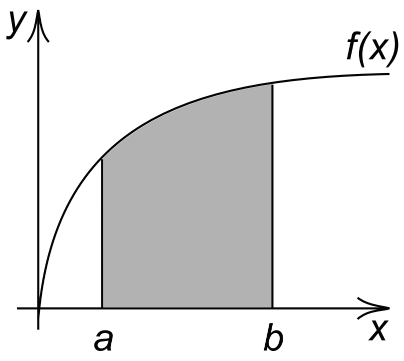


$$(b - a) \cdot c =: \int_a^b f(x)dx$$

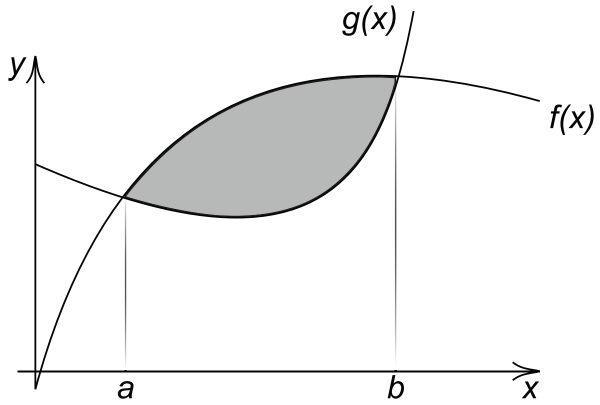
das *Integral* von f im Intervall $[a, b]$.

15.3 Integral gutartiger Funktionen

Analog können wir fragen, wie groß der Inhalt der Fläche ist, die durch den Graphen einer „gutartigen“ Funktion f im Intervall $[a, b]$ begrenzt wird. Dabei verstehen wir gutartig in dem Sinne, dass wir den Flächeninhalt bestimmen können.



Können wir diese Frage befriedigend beantworten, so können wir die Inhalte von Flächen berechnen, die krummlinig begrenzt sind, etwa die Fläche, die durch die Graphen von den gutartigen Funktionen f und g begrenzt wird.



Es stellt sich heraus, dass zu den gutartigen Funktionen die *Riemann-integrierbaren* Funktionen zählen.

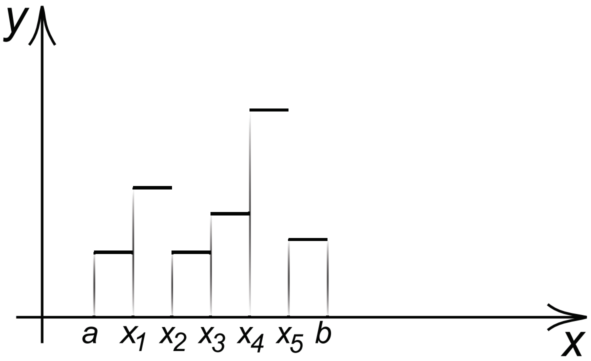
15.4 Integral von Treppenfunktionen

Für konstante Funktionen im Intervall $[a, b]$ ist die Bestimmung des Flächeninhalts einfach. Der nächst „schwierigere" Fall ist die Bestimmung des Flächeninhalts, bzw. die Bestimmung des Integrals einer Treppenfunktion $\varphi\colon [a, b] \to \mathbb{R}$.

Zur Erinnerung (vgl. Vorlesung 11): Eine Funktion $\varphi\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt Treppenfunktion, wenn es eine Unterteilung (Partition)

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_1 = b$$

des Intervalls $[a, b]$ und Konstante $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $\varphi(x) = c_k$ mit $x \in (x_{k-1}, x_k)$ und $k = 1, \ldots, n$. Funktionswerte $\varphi(x_k)$ in Teilpunkten sind beliebig.



Für den Flächeninhalt A einer Treppenfunktion φ gilt:

$$A = \sum_{k=1}^{n} c_k \cdot (x_k - x_{k-1}) =: \int_a^b \varphi(x)dx.$$

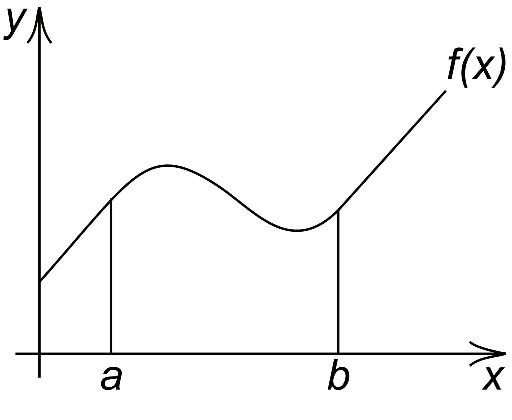
$\int$ steht für S wie Summe, dx steht für infinitesimal kleine x-Werte.

Es sei $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion im Intervall $[a, b]$. f sei hinreichend „gutartig", so dass sich f durch Treppenfunktionen approximieren lässt. Sei P eine Partition des Intervalls $[a, b]$ gegeben:

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Wir setzen als Untersumme

$$U(P) := \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) \inf_{x_{k-1} < x < x_k} f(x),$$



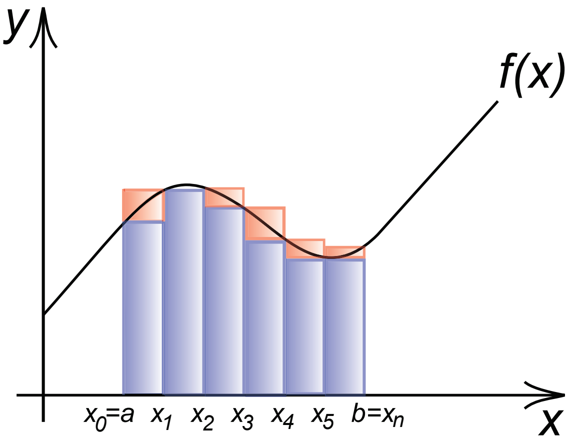


Abbildung 15.1: Darstellung von Obersumme und Untersumme im Intervall $[a, b]$. Hier ist $n = 6$.

dabei bezeichnet inf das Infimum der Funktionswerte im Intervall (x_{k-1}, x_k); das ist die größte untere Schranke der Funktionswerte.

Wir setzen als Obersumme

$$O(P) := \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) \sup_{x_{k-1}<x<x_k} f(x),$$

dabei bezeichnet sup das Supremum der Funktionswerte im Intervall (x_{k-1}, x_k); das ist die kleinste obere Schranke der Funktionswerte.
Offenbar gilt:

$$U(P) \leq \int_a^b f(x)dx \leq O(P).$$

Die Partition werde nun unendlich fein und wir setzen

$$\begin{aligned} \overline{\int_a^b} f(x)dx &= \inf_P O(P) = \inf\{O(P) \colon P \text{ ist eine Partition von } [a,b]\} \\ \underline{\int_a^b} f(x)dx &= \sup_P U(P) = \sup\{U(P) \colon P \text{ ist eine Partition von } [a,b]\}. \end{aligned}$$

$\overline{\int_a^b} f(x)dx$ nennen wir *Oberintegral* und $\underline{\int_a^b} f(x)dx$ nennen wir *Unterintegral.*
Offenbar gilt

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx.$$

15.5 Das Riemann-Integral

Definition 15.5.1 (Riemann-Integral)**.** Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Falls

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx$$

gilt, so sagen wir, dass f *Riemann-integrierbar* ist und wir setzen

$$\int_a^b f(x)dx := \underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx.$$

Für jede Treppenfunktion $\varphi\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ gilt:

$$\overline{\int_a^b} \varphi(x)dx = \underline{\int_a^b} \varphi(x)dx.$$

Deshalb ist jede Treppenfunktion Riemann-integrierbar. Für Riemann-integrierbar schreiben wir kurz integrierbar.

Satz 15.5.2. Jede stetige Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ ist integrierbar.

Für einen Beweis siehe A1-Vorlesung.

Beispiel: Wir wollen $\int_0^1 f(x)dx$ mit $f(x) = x^2$ bestimmen. Hierfür benötigen wir folgende Summenformel:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \text{(Beweis durch vollständige Induktion).}$$

Wir wählen eine äquidistante Partition des Intervalls [0,1] mit $x_k = \frac{k}{n}$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$. Es gilt

$$\begin{aligned} \inf_{x_{k-1}<x<x_k} f(x) &= \left(\frac{k-1}{n}\right)^2 \text{ und} \\ \sup_{x_{k-1}<x<x_k} f(x) &= \left(\frac{k}{n}\right)^2. \end{aligned}$$

Für die Untersumme von P gilt daher

$$\begin{aligned} U(P) &= \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) \inf_{x_{k-1}<x<x_k} f(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\left(\frac{k-1}{n}\right)^2 \\ &= \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}(k-1)^2 \underset{\text{verschiebung}}{\overset{\text{Index-}}{=}} \frac{1}{n^3}\sum_{k=0}^{n-1} k^2 = \frac{1}{n^3}\left[\sum_{k=1}^{n} k^2 - n^2\right] \\ &= \frac{1}{n^3}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - n^2\right] = \frac{1}{n^3}\left[\frac{2n^3 - 3n^2 + n}{6}\right] \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} \to \frac{1}{3} \quad \text{für } n \to \infty\ . \end{aligned}$$

Daher gilt

$$\underline{\int_0^1} x^2 dx = \frac{1}{3}.$$

Für die Obersumme von P gilt analog

$$\begin{aligned}
O(P) &= \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) \sup_{x_{k-1}<x<x_k} f(x) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \left(\frac{k}{n}\right)^2 \\
&= \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k^2 \\
&= \frac{1}{n^3} \left(\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}\right) \\
&= \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} \to \frac{1}{3} \quad \text{für } n \to \infty \ .
\end{aligned}$$

Daher gilt

$$\overline{\int_0^1} x^2 dx = \frac{1}{3}.$$

Insgesamt erhalten wir

$$\overline{\int_0^1} x^2 dx = \underline{\int_0^1} x^2 dx = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}.$$

Satz 15.5.3 (Linearität des Integrals)**.** Es sei $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbare Funktionen und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann sind auf $f+g$ und λf bzw. λg integrierbar und es gilt:

(i)
$$\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

(ii)
$$\int_a^b (\lambda f)(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx$$

(iii)
$$\text{Aus } f \le g \text{ folgt } \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx.$$