Vorlesung 16

Infinitesimalrechnung, Mengenlehre und logische Verknüpfungen

16.1 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Wir verknüpfen nun Differential- mit Integralrechnung.

Definition 16.1.1. Eine differenzierbare Funktion $F : I \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt Stammfunktion einer Funktion $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, falls $F' = f$.

Der folgende Satz ist grundlegend:

Satz 16.1.2. (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)
Teil 1: Sei $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $a \in I$. Dann ist für alle $x \in I$ die Integralfunktion

$$F(x) := \int_a^x f(t)dt$$

differenzierbar und eine Stammfunktion von f.
Teil 2: Überdies gilt für alle $a, b \in I$:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Bemerkung. Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (HDI) ist eines der Hauptresultate der A1-Vorlesung. Ein Beweis würde den Rahmen des Vorkurses sprengen.
Teil 1 des HDI bedeutet die Existenz von Stammfunktionen und stellt den Zusammenhang zwischen Ableitung und Integral her.
Teil 2 erklärt, wie Integrale berechnet werden können.

Beispiele.

- Für $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$ ist $F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$ eine Stammfunktion zu $f(x)$, denn $F'(x) = f(x)$.
- Für die trigometrischen Funktionen gilt

$$\begin{aligned} \sin'(x) &= \cos(x) \\ \cos'(x) &= -\sin(x). \end{aligned}$$

  Demnach gilt

$$\int \sin(x)dx = -\cos(x) + c$$

  ist eine Stammfunktion von $\sin(x)$ und

$$\int \cos(x)dx = \sin(x) + c$$

  eine Stammfunktion von $\cos(x)$.
  Hier bezeichnet c eine Konstante. Stammfunktionen unterscheiden sich nur in einer Konstanten. Der Beweis folgt in der A1-Vorlesung, benutzt wird dabei die Reihendarstellung der Sinus- und Kosinusfunktion.
- Es gilt

$$\int e^x dx = e^x + c.$$

Bemerkung. (Notation)
Es sei $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig und F die Stammfunktion von f. Nachdem HDI gilt

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Wir schreiben hierfür auch

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(x) \mid_a^b .$$

16.2 Partielle Integration

Vorsicht:

$$\int_a^b f(x)g(x)dx \neq \int_a^b f(x)dx \cdot \int_a^b g(x)dx.$$

Stattdessen gilt der folgende Satz.

Satz 16.2.1. (Partielle Integration)
Es seien $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbare Funktionen. Dann gilt

$$\int_a^b f(x) \cdot g'(x)dx = f(x) \cdot g(x) \mid_a^b - \int_a^b g(x) \cdot f'(x)dx$$

Kurzschreibweise: $\int f \cdot dg = f \cdot g - \int g \cdot df$

Beweis. Wir setzen $F(x) = f(x) \cdot g(x)$. Dann gilt nach der Produktregel der Differentiation $F'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$. Aufgrund der Linearität des Integrals gilt

$$\int_a^b F'(x)dx = \int_a^b f'(x)g(x)dx + \int_a^b f(x)g'(x)dx$$

Nach dem HDI gilt

$$\int_a^b F'(x)dx = F(x) \mid_a^b = f(x)g(x) \mid_a^b$$

Daraus folgt

$$f(x)g(x) \mid_a^b = \int_a^b f'(x)g(x)dx + \int_a^b f(x)g'(x)dx$$

und sofort die Behauptung. $\square$

Definition 16.2.2. Eine Funktion $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt stetig differenzierbar, wenn sie differenzierbar ist und ihre Ableitung f' stetig ist.

Beispiele. Gesucht ist eine Stammfunktion von $x \cdot \sin(x)$. Nach dem HDI ist $\int_a^x t \cdot \sin(t)dt$ eine Stammfunktion. Wir wenden partielle Integration an:

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

$$\begin{aligned}
\int_a^x \underbrace{t}_{=:f(t)} \cdot \underbrace{\sin(t)}_{=:g'(t)} dt &\overset{\substack{\text{partielle}\\ \text{Integration}}}{=} t \cdot (-\cos(t)) \mid_a^x - \int_a^x 1(-\cos(t))dt \\
&= -t \cdot \cos(t) \mid_a^x + \int_a^x \cos(t)dt \\
&= -x \cdot \cos(x) + a \cdot \cos(a) + \sin(t) \mid_a^x \\
&= -x \cdot \cos(x) + a \cdot \cos(a) + \sin(x) - \sin(a)
\end{aligned}$$

Somit ist $-x \cdot \cos(x) + \sin(x)$ eine Stammfunktion von $x \cdot \sin(x)$.

16.3 Substitutionsregel

Zur Bestimmung des Integrals bzw. einer Stammfunktion von verketteten Funktionen benutzen wir den folgenden Satz.

Satz 16.3.1. (Substitutionsregel)
Sei $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion mit $g([a, b]) \subset I$. Dann gilt

$$\int_a^b f(g(t)) \cdot g'(t)dt = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)dx$$

Beweis. Sei $F : I \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f. Für $F \circ g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ gilt nach der Kettenregel

$$(F \circ g)'(t) = F'(g(t)) \cdot g'(t) = f(g(t)) \cdot g'(t)$$

Mit dem HDI gilt

$$\begin{aligned} \int_a^b f(g(t)) \cdot g'(t) dt &= (F \circ g)(t) \mid_a^b \\ &= F(g(b)) - F(g(a)) \\ &= \int_{g(a)}^{g(b)} f(x) dx. \end{aligned}$$

□

Beispiel. Zu bestimmen ist $\int_0^2 x \cdot \sin(x^2 + 1)dx$. Wir setzen $f(x) = \sin(x)$ und $g(x) = x^2 + 1$. Daraus folgt $f(g(x)) = \sin(x^2 + 1)$ und $g'(x) = 2x$. Nun gilt

$$\begin{aligned} \int_0^2 x \cdot \sin(x^2 + 1) dx &= \frac{1}{2} \int_0^2 2x \cdot \sin(x^2 + 1) dx \\ &\overset{\text{Substitution}}{=} \frac{1}{2} \int_{g(0)}^{g(2)} f(u) du \\ &= \frac{1}{2} \int_{0^2+1}^{2^2+1} \sin(u) du \\ &= \frac{1}{2} [-\cos(u)]_1^5 \\ &= \frac{1}{2} (\cos(1) - \cos(5)). \end{aligned}$$

16.4 Exponential- und Logarithmusfunktion

Definition 16.4.1. Sei $1 \neq a > 0$. Dann heißt $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$ mit $x \longmapsto a^x$ eine Exponentialfunktion mit Basis a. Falls $a = e$, wobei e die Eulersche Zahl bezeichnet, so sprechen wir von *der* Exponentialfunktion. Für e^x schreiben wir auch $\exp(x)$.

Die Exponentialfunktion $\exp(x)$ besitzt eine Reihendarstellung

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

Diese Reihe konvergiert für jedes $x \in \mathbb{R}$. Nach einem Satz aus der Analysis dürfen wir gliedweise differenzieren, das heißt

$$\frac{d}{dx} \exp(x) = \frac{d}{dx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{dx} \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} (k-1) \frac{x^{k-1}}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \exp(x).$$

Dabei bedeutet $\frac{d}{dx} f(x) = f'(x)$. Somit gilt $(\exp(x))' = \exp(x)$, also ist die Exponentialfunktion ihre eigene Ableitung.

Satz 16.4.2 (Funktionalgleichung der Exponentialfunktion)**.** Es gilt

$$\exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y) \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Satz 16.4.3. Die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ist streng monoton wachsend und bildet $\mathbb{R}$ bijektiv auf $\mathbb{R}^+$ ab. ($\mathbb{R}^+$ bedeutet ohne 0)

Die Umkehrfunktion $\ln : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ ist stetig und streng monoton wachsend und heißt natürlicher Logarithmus.
Es gilt die Funktionalgleichung

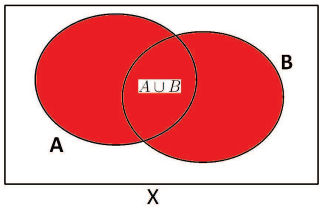
$$\ln(x \cdot y) = \ln(x) + \ln(y) \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^+.$$

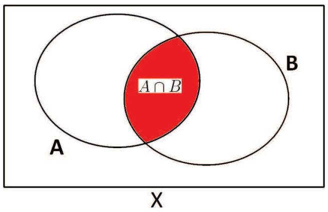
Es gilt

$$\frac{d}{dx} \ln(x) = \frac{1}{x} \text{ für } x \in \mathbb{R}^+.$$

16.5 Mengenlehre und logische Verknüpfungen

Gegeben sei die nichtleere Menge X. Seien $A, B \subset X$.
Wir schreiben $A \cup B$ für die Vereinigung von A und B.
Falls $x \in A \cup B$, so bedeutet dies $x \in A$ oder $x \in B$.
Wir schreiben kurz $x \in A \vee x \in B$.
Wir beachten, das „oder“ kein ausschließendes Oder bedeutet. Wenn $x \in A \cup B$, dann kann x auch in A und B liegen.





Wir schreiben $A \cap B$ für den Schnitt von A und B.
Falls $x \in A \cap B$, so bedeutet dies $x \in A$ und $x \in B$.
Wir schreiben kurz $x \in A \wedge x \in B$.
$\vee$ und $\wedge$ sind logische Verknüpfungen.

Wir haben folgende logische Verknüpfungen, es seien A und B jeweils Aussagen.

logische Verknüpfung	**Aussage**
A^C oder $\neg A$	bedeutet die Negation von A
$A \Rightarrow B$	aus A folgt B
$A \Leftrightarrow B$	A und B sind äquivalent
$A \vee B$	A oder B, d.h entweder A oder B oder beide.
$A \wedge B$	sowohl A als auch B

Die logischen Verknüpfungen von Aussagen korrespondieren zu Verknüpfungen von Mengen. Es seien $A, B \subset X$ Mengen.

Aussagenlogik	**Mengenoperationen**
$A \Rightarrow B$	$A \subset B$
$A \Leftrightarrow B$	$A = B$
$A \vee B$	$A \cup B$
$A \wedge B$	$A \cap B$

Beispiele. Behauptung: Es seien A und B zwei Aussagen, dann gilt

$$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$$

Es gibt zwei Möglichkeiten diese Aussage zu beweisen. Mit Hilfe der Aussagenlogik und der logischen Verknüpfungen kann eine Wahrheitstabelle angelegt werden. Die andere Möglichkeit ist die Teilmengeninklusion. Wir führen den Beweis in beiden Arten durch. Zunächst mit Hilfe einer Wahrheitstabelle.

Beweis.

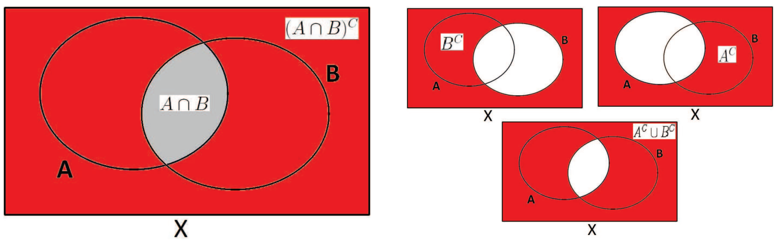
A	B	$A \vee B$	$\neg(A \vee B)$	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \wedge \neg B$
wahr	wahr	wahr	falsch	falsch	falsch	falsch
wahr	falsch	wahr	falsch	falsch	wahr	falsch
falsch	wahr	wahr	falsch	wahr	falsch	falsch
falsch	falsch	falsch	wahr	wahr	wahr	wahr

Man sieht nun anhand der Wahrheitstabelle die Äquivalenz der beiden Aussagen (3. Spalte bzw. 7. Spalte). □

Für die Teilmengeninklusion muss die Aussage zunächst in Mengenschreibweise umgeschrieben werden. Wir erhalten die Aussage

$$(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$$

Illustration durch Mengen:



Beweis. Wir führen eine Teilmengeninklusion durch und zeigen

(i) jedes Element das in $(A \cap B)^C$ enthalten ist, ist auch in $A^C \cup B^C$ enthalten, d.h. $(A \cap B)^C \subseteq A^C \cup B^C$.

(ii) jedes Element das in $A^C \cup B^C$ enthalten ist, ist auch in $(A \cap B)^C$ enthalten, d.h. $(A \cap B)^C \supseteq A^C \cup B^C$.

Zu (i): Sei $x \in (A \cap B)^C$. Dann gilt $x \notin A \cap B$. Da $A \cap B = \{y \mid y \in A \; und \; y \in B\}$ folgt $x \notin A$ oder $x \notin B$. Falls $x \notin A$, so ist $x \in A^C$, und daher $A^C \cup B^C$. Analog $x \notin B$, so ist $x \in B^C$ und daher $A^C \cup B^C$. Da x beliebig gilt $(A \cap B)^C \subseteq A^C \cup B^C$.
Zu (ii): (durch Widerspruch)
Angenommen, es gibt ein $x \in A^C \cup B^C$ mit $x \notin (A \cap B)^C$. Dann $x \in A \cap B$, d.h. $x \in A$ und $x \in B$. Daraus folgt $x \notin A^C$ und $x \notin B^C$.
Somit ist $x \notin A^C \cup B^C$. Widerspruch zur Annahme.
Es folgt $(A \cap B)^C \supseteq A^C \cup B^C$.
Insgesamt folgt nun aus (i) und (ii) die Behauptung. □