Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Vorkurs Mathematik 2015
Dr. D.K. Huynh

Blatt 3

Aufgabe 10

Es bezeichne $((\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^\times, \cdot)$ die Menge der von 0 verschiedenen Restklassen bezüglich der Division durch 7. Für $x, y \in \mathbb{Z}$ definieren wir

$$[x] \cdot [y] := [x \cdot y].$$

Zeigen Sie, dass für alle $x, y, z \in \mathbb{Z}$ gelten:

(i) $([x] \cdot [y]) \cdot [z] = [x] \cdot ([y] \cdot [z])$,

(ii) es gibt ein $n \in \mathbb{Z}$ mit dem gilt: $[x] \cdot [n] = [n] \cdot [x] = [x]$,

(iii) jedes Element besitzt ein inverses Element.

Was haben Sie mit den Punkten (i) bis (iii) gezeigt? Ist $((\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^\times, \cdot)$ abelsch?

Aufgabe 11

Beweisen Sie unter Benutzung der Restklassenarithmetik: Eine Zahl ist genau dann durch 11 teilbar, wenn ihre alternierende Quersumme durch 11 teilbar ist. Hinweis: Sei $a = \sum_{k=0}^{N} a_k 10^k, a_k \in \{0, 1, \ldots, 9\}$. Dann ist ihre alternierende Quersumme definiert als

$$Q^*(a) = \sum_{k=0}^{N} (-1)^k a_k.$$

Aufgabe 12

Es sei $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl. Zudem seien $3n + 1$ und $4n + 1$ Quadratzahlen. Zeigen Sie, dass n durch 8 teilbar ist.

Aufgabe 13

Nutzen Sie Ihre Kenntnisse über Teilbarkeitslehre und zeigen Sie, dass die Gleichung

$$3987^{12} + 4365^{12} = 4472^{12}$$

falsch und daher kein Gegenbeispiel des *Großen Fermatschen Satzes* ist.

Aufgabe 14

Kann man aus 100 beliebig gegebenen ganzen Zahlen *stets* 15 Zahlen derart auswählen, dass die Differenz zweier beliebiger dieser 15 Zahlen durch 7 teilbar ist? Beweisen Sie Ihre Antwort.

Die Übungsblätter, das Skript, Raumbelegungen und laufende Informationen zum Vorkurs finden Sie auf `http://tinyurl.com/mathevorkurs2015`