Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Vorkurs Mathematik 2015
Dr. D.K. Huynh

Blatt 9

Aufgabe 40
Bestimmen Sie Betrag, Argument, Real- und Imaginärteil der komplexen Zahl $z \in \mathbb{C}$:

$$\text{(a)}\quad z = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2} \qquad \text{(b)}\quad z = \frac{1-i}{1+i} \qquad \text{(c)}\quad z = i^n, n \in \mathbb{Z}$$
$$\text{(d)}\quad z = (1+i)^{2015} \qquad \text{(e)}\quad z = \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^n, n \in \mathbb{Z}.$$

Aufgabe 41
Bestimmen Sie alle $z \in \mathbb{C}$ mit

$$\text{(a)}\quad z^2 + z + 1 = 0 \qquad \text{(b)}\quad z^3 - 2z^2 + z - 2 = 0.$$

Aufgabe 42
Beweisen Sie

(a) die Additionstheoreme, d.h. für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y,$$
$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y.$$

Benutzen Sie hierzu die Eulersche Formel $e^{ix} = \cos x + i \sin x$.

(b) für alle $n \in \mathbb{N}$ mit vollständiger Induktion

$$(\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i \sin nx,$$

wobei $x, y \in \mathbb{R}$. Benutzen Sie hierbei die Additionstheoreme *ohne* Verwendung der Eulerschen Formel.

Aufgabe 43
Zeigen Sie, dass $(\mathbb{C}\backslash\{0\}, \cdot)$ mit der gewöhnlichen Multiplikation eine abelsche Gruppe ist.

Aufgabe 44
Skizzieren Sie die folgenden Mengen in der komplexen Zahlenebene

$$\text{(a)}\quad M = \{z \in \mathbb{C} : 1 \le |z| \le 2\} \qquad \text{(b)}\quad M = \left\{z \in \mathbb{C} : \frac{\pi}{4} < \arg(z) < \frac{\pi}{2}\right\}$$
$$\text{(c)}\quad M = \left\{z \in \mathbb{C} : |z| > 4 \text{ und } \pi \le \arg(z) \le \frac{3}{2}\pi\right\}.$$

Die Übungsblätter, das Skript, Raumbelegungen und laufende Informationen zum Vorkurs finden Sie auf `http://tinyurl.com/mathevorkurs2015`