



Blatt 11

Aufgabe 51

Untersuchen Sie auf Konvergenz und berechnen Sie gegebenenfalls den Wert der Reihe

$$(a) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2015n - 4} \quad (b) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^k} \quad (c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{4n^2 - 1}.$$

Aufgabe 52

Ein Fahrradfahrer fährt mit einer konstanten Geschwindigkeit v auf seinem Fahrrad vom Punkt A auf geradem Weg zum 1 km entfernten Punkt B . Als er losfährt, sitzt bei ihm eine Fliege auf der Nase, die sich daraufhin auch in Bewegung setzt. Mit der doppelten Geschwindigkeit fliegt sie ebenfalls in Richtung B . Als sie an Punkt B angekommen ist, dreht sie sofort um und fliegt wieder zurück auf die Nase des Fahrradfahrers, um dann aber direkt wieder in Richtung B zu fliegen. Dies setzt sie solange fort bis der Fahrradfahrer und sie gemeinsam an Punkt B ankommen. Welche Strecke hat die Fliege dann zurückgelegt?

Aufgabe 53

Es seien $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Funktionen gegeben durch $f(x) = x+1$ und $g(x) = x^2$. Wenden Sie, geeignet oft, Komposition von Funktionen und/oder algebraische Operationen auf f und g an und stellen Sie so dar:

- (a) die identische Abbildung $\text{id} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.
(b) die Funktion

$$p(x) = \frac{1}{1-x}$$

für $|x| < 1$.

- (c) Die Funktionen $\Phi, \Psi : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ seien gegeben durch $\Phi(x) = 2\sqrt{x}$ und $\Psi(x) = \sum_{i=1}^3 x^i$. Beachten Sie, dass für $x > 0$ mit der Schreibweise \sqrt{x} stets die positive Quadratwurzel gemeint ist. Bestimmen Sie $(\Phi \circ \Psi)(x)$, $(\Psi \circ \Phi)(x)$ und $(\Psi \circ \Phi)(25) + 1$.

Aufgabe 54

Die Zackenfunktion $z : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$z(x) = \text{abs} \left(\text{entier} \left(x + \frac{1}{2} \right) - x \right),$$

dabei bezeichnet $\text{abs}(x)$ den Absolutbetrag von x und $\text{entier}(x)$ die Gauß-Klammer von x . Zeichnen Sie den Graphen von z und zeigen Sie:

- (a) Für $|x| \leq \frac{1}{2}$ gilt $z(x) = \text{abs}(x)$.
(b) z hat die Periode 1, d.h. es gilt $z(x+n) = z(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{Z}$.