Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Vorkurs Mathematik 2015
Dr. D.K. Huynh

Blatt 12

Aufgabe 55

Prüfen Sie die folgenden Funktionen auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität. Beweisen Sie Ihre Antworten.

(a) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit

$$f(n) = 2n + 1$$

(b) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{falls } x < 0 \\ (x-1)^3 & \text{falls } x \geq 0 \end{cases}$$

(c) $h : (0, 1) \to \mathbb{R}^+$ mit

$$h(x) = \frac{1-x}{x}.$$

Aufgabe 56*

Zeigen Sie, dass die Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ abzählbar unendlich ist, indem sie eine bijektive Abbildung $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ angeben. Weisen Sie nach, dass ihre Funktion f tatsächlich bijektiv ist.

Aufgabe 57*

Es seien X, Y und Z Mengen. Ferner seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ Funktionen. Beweisen Sie die folgenden Aussagen

(a) Wenn f und g injektiv sind, so ist auch $g \circ f$ injektiv.

(b) Wenn f und g surjektiv sind, so ist auch $g \circ f$ surjektiv.

Aufgabe 58

Es seien X und Y Mengen. Es sei $f : X \to Y$ eine Funktion. Verneinen Sie die folgenden Aussagen

(a) $(\forall x_1 \in X)(\forall x_2 \in X)[f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2]$

(b) $(\forall y \in Y)(\exists x \in X)[f(x) = y]$.

Aufgabe 59

Informieren Sie sich über Cantors erstes Diagonalargument und wie es benutzt wird, um nachzuweisen, dass $\mathbb{Q}$ abzählbar ist. Sie können hierfür die Bibliothek aufsuchen und Lehrbücher der Analysis oder Lineare Algebra konsultieren.

Zur Beachtung: *Ihre Lösungen zu den Aufgaben 56 und/oder 57 können Sie heute Ihrem Tutor zur Korrektur mitgeben. Sie können sie auch später per E-Mail an Ihren Tutor schicken. Sie erhalten dann eine Rückmeldung zu Ihren Lösungen. Die Übungsblätter, das Skript, Raumbelegungen und laufende Informationen zum Vorkurs finden Sie auf `http://tinyurl.com/mathevorkurs2015`