Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Vorkurs Mathematik 2015
Dr. D.K. Huynh

Blatt 13

Aufgabe 60
Zeigen Sie: Es gibt unendlich viele Primzahlen. Sie dürfen den Fundamentalsatz der Arithmetik benutzen: Jede natürliche Zahl lässt sich eindeutig als Produkt von Primzahlpotenzen schreiben.

Aufgabe 61
Es seien A und B Mengen. Zeigen Sie

(a) $A \cap B = A - (A - B)$

(b) $A \cup B = A - (A \cap B) \cup B$.

Aufgabe 62
Es seien A und B endliche Mengen. Ferner bezeichne $|A|$ die Anzahl der Elemente von A. Zeigen Sie

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Tipp: Verwenden Sie Aufgabe 61 (b).

Aufgabe 63
Bei seinen Ermittlungen konnte Sherlock Holmes folgende Aussagen eruieren:

(i) Falls Moriarty betrunken war, dann ist entweder Doyle der Mörder oder Moriarty lügt.

(ii) Entweder ist Doyle der Mörder oder Moriarty war nicht betrunken und der Mord geschah nach Mitternacht.

(iii) Falls der Mord nach Mitternacht geschah, so ist entweder Doyle der Mörder oder Moriarty lügt.

(iv) Moriarty lügt nicht, wenn er nüchtern ist.

Aufgrund dessen konnte Sherlock Holmes logisch schließen, wer der Mörder war. Wer war es? Beweisen Sie Ihre Aussage.

Aufgabe 64
Verneinen Sie folgende Aussagen

(a) $(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists N \in \mathbb{N})\ (\forall n \in N)(n > N \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon)$

(b) $(\forall s \in \mathbb{C})\ ((\mathrm{Im}(s) \neq 0 \wedge \zeta(s) = 0) \Rightarrow \mathrm{Re}(s) = \frac{1}{2})$.

Aufgabe 65
Es sei $f : A \to B$ eine Funktion. Zeigen Sie

(a) Es gilt $f^{-1}(M) \cap f^{-1}(N) \subseteq f^{-1}(M \cap N)$, wobei $M, N \subseteq B$.

(b) f ist genau dann surjektiv, wenn $f(f^{-1}(N)) = N$ für $N \subseteq B$ gilt.