Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Vorkurs Mathematik 2015
Dr. D.K. Huynh

Blatt 14

Aufgabe 66
Untersuchen Sie die folgenden Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ auf Stetigkeit und beweisen Sie jeweils Ihre Aussagen:

(a) $f(x) = \begin{cases} x, & \text{falls } x < 0 \\ (x-1)^3, & \text{falls } x \geq 0 \end{cases}$ (b) $g(x) = \begin{cases} \frac{x^2-9}{x-3}, & \text{falls } x \neq 3 \\ A, & \text{falls } x = 3. \end{cases}$

Aufgabe 67
Die Dirichletsche Sprungfunktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{falls } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass $f(x)$ nirgends stetig ist.

Aufgabe 68
Bestimmen Sie, falls sie existiert, die erste Ableitung folgender Funktionen

(a) $f(x) = 3x - x^2$ (b) $g(x) = \dfrac{x}{1-x^2}, x \neq 1$ (c) $h(x) = \sqrt[3]{x^4+5}$

(d) $j(x) = \pi(x - \sqrt{x})^{2015}$ (e) $k(x) = \dfrac{x - \sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}}, x \neq 0.$

Aufgabe 69
Es seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen. Beweisen Sie die Produktregel der Differentiation, d.h.

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x).$$

Aufgabe 70
Beweisen Sie das notwendige Kriterium für das Vorliegen eines Extremums: Die Funktion $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ habe in $x \in (a, b)$ ein lokales Extremum und sei in x differenzierbar. Dann gilt $f'(x) = 0$.

Aufgabe 71
Sei $f : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $a \in D$. Zeigen Sie, dass f stetig in $a \in D$ ist.