Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Vorkurs Mathematik 2015
Dr. D.K. Huynh

Blatt 15

Aufgabe 72

Untersuchen Sie, ob für die folgenden Mengen das Supremum und das Infimum existiert und geben Sie sie gegebenenfalls an:

(a) $M = \mathbb{N}$ (b) $M = \mathbb{R}$ (c) $M = \left\{ \dfrac{n}{n+1} \text{ mit } n \in \mathbb{N} \right\}$

(d) $M = \{\sin(x) \text{ mit } x \in \mathbb{R}\}$ (e) $M = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - x = 1\}$

(f) $M = \left\{ \sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{2^k} \text{ mit } n \in \mathbb{N} \right\}$.

Aufgabe 73

Es sei entier : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Ganzzahlfunktion. Bestimmen Sie

$$\int_0^{100} \operatorname{entier}(x)dx.$$

Aufgabe 74

Es sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^3$.

(a) Wählen Sie eine äquidistante Partition P des Intervalls $I = [0,1]$ und bestimmen Sie sowohl die Untersumme $U(P)$ und die Obersumme $O(P)$ von $f(x)$ in I. Verwenden Sie hierzu die Summenformel (vgl. Blatt 8) für die ersten n Kubikzahlen

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^4 + 2n^3 + n^2}{4}.$$

(b) Benutzen Sie Ihre Resultate aus (a), um das Unterintegral und Oberintegral von f zu bestimmen. Geben Sie damit

$$\int_0^1 f(x)dx$$

an.

Aufgabe 75

Es seien $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Dirichletsche Sprungfunktion

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{falls } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}. \end{cases}$$

und P eine Partition des Intervalls $I \subset \mathbb{R}$. Bestimmen Sie die Untersumme und Obersumme von P. Begründen Sie, warum f auf I nicht Riemann-integrierbar ist.

Aufgabe 76

Bestimmen Sie

$$\int_{-2}^{2} \sin^3(x)dx.$$