Vorlesung 1

Einführung

1.1 Praktisches

Zeiten:

10:00-12:00 Uhr Vorlesung
12:00-13:00 Uhr Mittagspause
13:00-14:30 Uhr Präsenzübung
14:30-16:00 Uhr Übungsgruppen

Material:

- Papier und Stift
- wacher Verstand
- kein Taschenrechner

1.2 Philosophisches

- Was ist Mathematik?
  Eine Strukturwissenschaft, eine Geisteswissenschaft, aber keine Naturwissenschaft.
- Was machen Mathematiker?
  Mathematiker erforschen und analysieren Strukturen und führen Beweise. Ziel ist es meist, Dinge möglichst gut zu abstrahieren. Es gibt sozusagen zwei „Lager" der Mathematiker: Die „Theoriebauer" und die „Problemlöser".
- Wo wird Mathematik eingesetzt? Was sind Anwendungen von Mathematik?
  Beispielsweise in der Verschlüsselung (Kryptographie), für MP3s,...

- Ist alles in der Mathematik bereits erforscht?
  Nein! Zum Beispiel gibt es die sogenannten die Millenium-Prize-Probleme, die das Clay Mathematics Institute im Jahr 2000 auslobte. Für die Lösung jedes dieser Probleme kann man eine Million US-Dollar gewinnen. Eines davon ist das „P versus NP-problem“:
  P bezeichnet die Klasse derjenigen Fragestellungen, die in polynomialer Zeit beantwortet werden können, d.h. es gibt einen Algorithmus, der in polynomialer Zeit die Frage beantwortet. Die Frage kann also schnell beantwortet werden.
  Es gibt aber Fragen, für die es keinen Algorithmus gibt. Wenn aber eine Antwort existiert, so kann diese schnell überprüft werden. Diese Klasse, für die man Antworten in polynomialer Zeit überprüfen kann, wird mit NP bezeichnet.
  Offenbar gilt $P \subset NP$.

  Beispiel: Teilsummenproblem (subset sum problem)

  $$I = \{-2, -3, 15, 14, 7, -10\}$$

  Gibt es eine nicht-leere Teilmenge von I, sodass deren Elemente sich zu 0 aufaddieren? Die Antwort ist „ja“, denn

  $$(-2) + (-3) + (-10) + 15 = 0.$$

  Dies können wir sofort (in polynomialer Zeit (linear)) überprüfen. Es ist aber kein Algorithmus bekannt, mit dem man diese Frage in polynomialer Zeit beantworten könnte (es gibt aber einen in exponentieller Zeit). Es gilt:
  NP „schnell überprüfbar“
  P „schnell lösbar“
  Es ist offenbar $P \subset NP$. Die wichtige Frage ist also: Gilt $NP \subset P$ und somit $NP = P$? Viele glauben, dass die Gleichheit nicht gilt. Wer die Frage eindeutig beantworten kann, erhält vom Clay Mathematics Institute 1 Mio. US-Dollar.

1.3 Ein Intelligenztest – oder wie werden die Folgen fortgesetzt?

a) $2, 4, 6, 8, ...$

b) $3, 5, 7, ...$

c) $-1, 2, -4, 8, -16, ...$

Mögliche Antworten sind

a) Es kann als die Folge der geraden Zahlen fortgesetzt werden. Man könnte die Folge aber auch so fortsetzen:

$$2, 4, 6, 8, 2, 4, 6, 8, ...$$

b) Es kann als die Folge der ungeraden Zahlen ≥ 3 fortgesetzt werden. Ebenso könnte man die Folge auch als die der Primzahlen sehen.
Eine *Primzahl* ist eine natürliche Zahl mit genau zwei Teilern (1 ist keine Primzahl).

c) Die Zahlen werden verdoppelt mit wechselndem Vorzeichen. Letztendlich könnte man die Folge aber auch *beliebig* fortsetzen, beispielsweise mit

$$-1, 2, -4, 8, -16, 100, 101, \pi, e, ...$$

Um eine Folge eindeutig festzulegen, bedarf es einer *expliziten Darstellung*, etwa:

a) $a_n = 2n,\ n \in \mathbb{N}$
wobei $\mathbb{N}$ die Menge der natürlichen Zahlen bezeichnet, also $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, ...\}$.
Ob die Zahl 0 zu den natürlichen Zahlen gehört, ist unter Mathematikern strittig. In dieser Veranstaltung legen wir fest, dass $0 \in \mathbb{N}$ ist.

b) $b_n = 2n - 1,\ n \in \mathbb{N}, n \geq 1$
Dann ist b_n die Folge der ungeraden Zahlen ≥ 3.

c) Wie lautet die explizite Darstellung von

$$-1, 2, -4, 8, -16, ...?$$

Antwort: $c_n = (-1)^{(n+1)} 2^n,\ n \in \mathbb{N}$.
Beachte: Für $a > 0$ gilt $a^0 = 1$ (Begründung später.)

Bemerkung. Die Essenz dieses Abschnitts ist folgende Feststellung: Die mathematische Sprache erlaubt es uns, in kurzer und prägnanter Form eine unendliche Folge exakt zu beschreiben.

Einschub: Die Binomischen Formeln

Für $a, b \in \mathbb{R}$ gilt:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

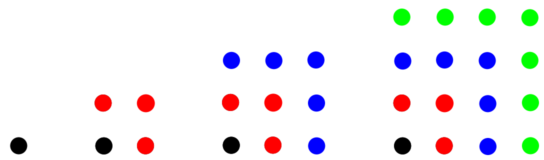
Hier bezeichnet $\mathbb{R}$ die Menge der reellen Zahlen. $\mathbb{R}$ werden wir später noch ausführlicher besprechen.
Wir betrachten die Folge

$$1, 4, 9, 16, 25, 36, ...$$

Um welche Folge handelt es sich hier? Was fällt auf? Es ist die Folge der Quadratzahlen:

$$\begin{array}{ccccccccccccc} 1 & & 4 & & 9 & & 16 & & 25 & & 36 & \cdots \\ \shortparallel & & \shortparallel & & \shortparallel & & \shortparallel & & \shortparallel & & \shortparallel & \\ 1^2 & & 2^2 & & 3^2 & & 4^2 & & 5^2 & & 6^2 & \cdots \\ & \underbrace{\quad}_{+3} & & \underbrace{\quad}_{+5} & & \underbrace{\quad}_{+7} & & \underbrace{\quad}_{+9} & & \underbrace{\quad}_{+11} & & \end{array}$$

Wir beobachten: Die Differenz zweier aufeinander folgender Quadratzahlen ist eine ungerade Zahl. Wie können wir eine solche Aussage beweisen? Manchmal hilft eine Veranschaulichung:



Zur n-ten Quadratzahl addieren wir $2n+1$ und erhalten die nächste Quadratzahl, also:

$$n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$$

und das ist genau die erste Binomische Formel. n^2 ist die n-te Quadratzahl und $(n+1)^2$ ist die $(n+1)$-te Quadratzahl. Ihre Differenz ist

$$(n+1)^2 - n^2 = 2n + 1.$$

Wir haben soeben einen mathematischen Beweis erbracht.

1.4 Beweisen

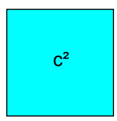
Wie ist ein mathematischer Beweis aufgebaut?
Formal besteht ein Beweis aus:

- Behauptung: Voraussetzungen und eigentliche Behauptung
- Beweis: Aus den Voraussetzungen wird mittels einer Kette von logischen Schritten die Behauptung hergeleitet.

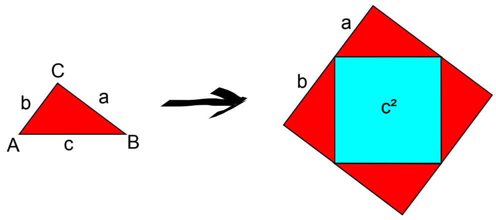
Welche Sätze kennen Sie aus der Schule? Wahrscheinlich unter anderem den **Satz des Pythagoras**. Im Folgenden werden wir diesen beweisen.

Voraussetzung: Das Dreieck ist rechtwinklig.
Behauptung: In einem rechtwinkligen Dreieck ist die Summe der Flächeninhalte der Quadrate über den Katheten gleich dem Flächeninhalt des Quadrats über der Hypotenuse.

Beweis. Wir erstellen ein Quadrat mit Kantenlänge c



und errichten über jeder Seite des Quadrates das Dreieck ABC:



Dann gilt für den Flächeninhalt A_1 des neu entstandenen großen Quadrates mit der Seitenlänge $a + b$: $A_1 = (a + b)^2$. Andererseits gilt: $A_1 = 4A_\Delta + c^2$ wobei A_Δ der Flächeninhalt des Dreiecks ABC ist. Wir haben $A_\Delta = \frac{1}{2}ab$.
Somit gilt

$$A_1 = 4A_\Delta + c^2 = 4 \cdot \tfrac{1}{2}ab + c^2 = 2ab + c^2.$$

Ferner haben wir

$$A_1 = (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Daraus folgt

$$a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2$$

und damit

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

□

An welcher Stelle haben wir ausgenutzt, dass das Dreieck ABC rechtwinklig ist?
Antwort: An der Stelle „wir errichten über jeder Seite des Quadrates mit Kantenlänge c. . . “. Das so erhaltene Polygon (Vieleck) ist genau dann ein Quadrat, wenn ABC rechtwinklig ist!

Bemerkung. $a^2 + b^2 = c^2$ mit $a, b, c, \in \mathbb{Q}$ ist eine *Diophantische Gleichung*, dabei interessieren wir uns nur für rationale Lösungen a, b und c. Diophantische Gleichungen sind ein Teilgebiet der Zahlentheorie – auch bekannt als „Königin der Mathematik“. Die Gleichung

$$a^2 + b^2 = c^2$$

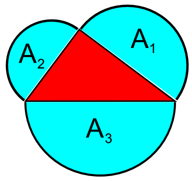
besitzt unendlich viele rationale Lösungen – ein solches Lösungstripel (a, b, c) wird pythagoräisches Tripel genannt. Wir können allgemein fragen: Gibt es Lösungen mit $a, b, c \in \mathbb{Q}$ für

$$a^n + b^n = c^n \text{ mit } n \geq 3?$$

Die Antwort ist „Nein“ und ist Gegenstand von *Fermats letzten Satz*. Die Behauptung stand über 350 Jahre im Raum und wurde schließlich von Andrew Wiles in siebenjähriger Arbeit 1995 bewiesen. An dieser Stelle eine Literaturempfehlung: Simon Singh – Fermats letzter Satz.

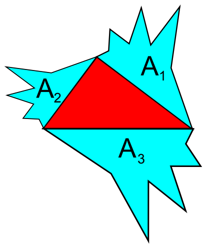
Aus dem Satz des Pythagoras folgt:

Satz 1.4.1. (Möndchen des Hippokrates) Die Summe A_1 und A_2 der Flächeninhalte der Halbkreise über den Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks ABC ist gleich dem Flächeninhalt A_3 des Halbkreises über der Hypotenuse.



Beweis. Übungsaufgabe 4 von Blatt 1.
Eine Verallgemeinerung von Pythagoras ist folgender

Satz 1.4.2. Errichtet man über den Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks ABC ähnliche Polygone, so gilt: Die Summe der Flächeninhalte A_1 und A_2 der Polygone über den Katheten ist gleich dem Flächeninhalt A_3 des Polygons über der Hypotenuse.



Zur Erinnerung: Zwei Polygone heißen *ähnlich*, wenn ihre Winkel übereinstimmen und alle ihre Begrenzungslinien jeweils im gleichen Verhältnis zueinander stehen.

In der allgemeinen Form lautet der Satz des Pythagoras

Satz 1.4.3. Errichtet man über den Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks ABC ähnliche Figuren, so gilt: Die Summe der Flächeninhalte der Figuren über den Katheten ist gleich dem Flächeninhalt der Figur über der Hypotenuse.