Vorlesung 2

Natürliche Zahlen, Summen und Summenformeln

2.1 Die natürlichen Zahlen

Die natürlichen Zahlen sind diejenigen Zahlen mit denen wir zählen

$$0, 1, 2, 3, \ldots$$

Es gibt unendlich viele und wir schreiben kurz

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

Wir wissen, wie wir natürliche Zahlen addieren und multiplizieren. Wir kennen auch die folgenden Gesetze für diese Verknüpfungen:

Addition	Multiplikation	Gesetz
$m + n = n + m$	$m \cdot n = n \cdot m$	*Kommutativität*
$k + (m + n) = (k + m) + n$	$k \cdot (m \cdot n) = (k \cdot m) \cdot n$	*Assoziativität*

Darüber hinaus gilt die *Distributivität*, d.h.

$$k \cdot (m + n) = k \cdot m + k \cdot n.$$

Wir setzen stillschweigend voraus: Es gilt Punkt- *vor* Strichrechnung.

Bemerkung. Aus der Distributivität ergibt sich z.B.

$$\begin{aligned}(10 + a) \cdot (10 + b) &= 10 \cdot (10 + b) + a \cdot (10 + b)\\ &= 100 + 10b + 10a + ab\\ &= 100 + 10(a + b) + ab.\end{aligned}$$

Und damit eine Rechenhilfe für das Große Einmaleins (wenn $a, b \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$) aus dem kleinen Einmaleins – wir müssen lediglich die Einerstellen (a und b)

addieren, anschließend mit 10 multiplizieren. Das Resultat addieren wir zum Produkt der Einerstellen und 100. Hierzu müssen wir nur das kleine Einmaleins kennen.

Beispiel.

$$17 \cdot 15 = 100 + 10 \cdot (7 + 5) + 7 \cdot 5 = 100 + 120 + 35 = 255.$$

Die Zahlen 0 und 1 spielen für die Addition bzw. Multiplikation eine Sonderrolle. Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} 0 + n &= n \\ 1 \cdot n &= n \end{aligned}$$

Wir nennen 0 ein *neutrales* Element für die Addition und 1 ein *neutrales* Element für die Multiplikation.
Für natürliche Zahlen a, b gelten:

$$a + b = 0 \Rightarrow a = b = 0.$$

(Das gilt nicht für ganze Zahlen!) Und ferner:

$$a \cdot b = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ oder } b = 0.$$

Wir können natürliche Zahlen der Größe nach vergleichen:
Wir schreiben $m \leq n$, wenn es eine natürliche Zahl k mit $m + k = n$ gibt.
In diesem Fall sagen wir: m ist kleiner oder gleich n.
Beachten Sie: Dieses "oder" ist kein ausschließliches oder im Sinne von "entweder oder". Dazu später mehr.
Die Relation '$\leq$' genügt den folgenden Gesetzen:

- *Transitivität*, d.h.
$$k \leq m \quad \text{und} \quad m \leq n \Rightarrow k \leq n.$$
- *Reflexivität*, d.h.
$$n \leq n.$$
- *Antisymmetrie*, d.h.
$$m \leq n \quad \text{und} \quad n \leq m \Rightarrow m = n.$$
- *Totalität*, d.h.
$$m \leq n \quad \text{oder} \quad n \leq m.$$

Darüber hinaus ist $0 \leq n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Bezüglich der Addition und Multiplikation gilt für $\leq$:

$$\begin{aligned} m \leq n &\quad \Rightarrow k + m \leq k + n \\ m \leq n &\quad \Rightarrow k \cdot m \leq k \cdot n. \end{aligned}$$

2.1.1 Bubble Sort

In der Informatik (und immer da, wo wir es mit großen Datenmengen zu tun haben) kommt es vor, dass wir eine ungeordnete Liste etwa nach Größe sortieren müssen.
Ein Beispiel für einen Sortieralgorithmus ist *bubble sort*. Gegeben sei eine nicht notwendigerweise sortierte Liste, etwa

$$6, 5, 3, 1, 4.$$

Im bubble sort Algorithmus durchlaufen wir die Liste von links nach rechts und vergleichen das jeweils aktuelle Element mit seinem rechten Nachbar. Falls die beiden das Sortierkriterium (z.B. $a < b$) verletzen werden sie getauscht. Die „bubble-Phase“ wird solange wiederholt bis die Eingabeliste vollständig sortiert ist. Dabei wandert das jeweils größte Element wie eine „Blase“ nach oben,

$$\begin{aligned}&6, 5, 3, 1, 4 \to 5, 6, 3, 1, 4 \to 5, 3, 6, 1, 4 \to 5, 3, 1, 6, 4 \to 5, 3, 1, 4, 6\\ &\to 3, 5, 1, 4, 6 \to 3, 1, 5, 4, 6 \to 3, 1, 4, 5, 6 \to 1, 3, 4, 5, 6.\end{aligned}$$

Frage: Wieviele Vertauschungen werden im „best case“ bzw. im „worst case“ bei einer Liste von 10 Elementen benötigt?

- Im best case haben wir eine bereits sortierte Liste, etwa:

  $$1, 2, 3, \ldots, 10$$

  Benötigt werden also 0 Vertauschungen.

- Im worst case ist die Liste in umgekehrter Reihenfolge:

  $$10, 9, 8, \ldots, 1$$

  Hier werden $9 + 8 + 7 \ldots + 1$ Vertauschungen benötigt, um die Liste zu sortieren.

2.2 Das Summenzeichen

Es stellt sich hier die Frage: Was ist $1 + 2 + 3 \ldots + 9$? Oder was ist z. B. $1 + 2 + 3 + 4 \ldots + 100$? Oder allgemein, was ist die Summe der ersten n Zahlen? Was ist $1 + 2 + 3 + \ldots + n$?
Um den Schreibaufwand zu reduzieren und aus Gründen der Übersichtlichkeit, führen wir nun die in der Mathematik übliche Schreibweise für Summen ein. Zum Beispiel haben wir

$$\sum_{j=1}^{10} j = 1 + 2 + \ldots + 10.$$

Dabei bezeichnet der griechische Groß-Buchstabe Sigma $\sum$ das Summenzeichen. $j \in \mathbb{Z}$ ist der Laufindex, wobei hier $j = 1$ der Startindex und $j = 10$ der Endindex ist. Hierbei durchläuft j die Werte von 1 bis 10 und erhöht seinen

Wert bei jedem Durchlauf um 1, bis 10 erreicht ist. Allgemein:
Es sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann haben wir mit dem Summenzeichen für $m \leq n$ folgende Identitäten

$$\sum_{j=1}^{n} f(j) = f(1) + f(2) + f(3) + \ldots + f(n)$$
$$\sum_{j=m}^{n} f(j) = f(m) + f(m+1) + \ldots + f(n).$$

Gilt $m > n$, so haben wir die *leere Summe*, diese ist 0.

Analog erklären wir die Produktschreibweise. Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Dann setzen wir

$$\prod_{j=1}^{n} f(j) := f(1) \cdot f(2) \cdot \ldots \cdot f(n).$$

Speziell für $f(j) = j$ haben wir

$$\prod_{j=1}^{n} j := 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n;$$

für diesen Ausdruck des Produktes der ersten n Zahlen schreiben wir kurz

$$n! \quad \text{(lies } n \text{ Fakultät).}$$

Per definitionem ist

$$0! := 1.$$

Falls $m > n$, so handelt es sich bei

$$\prod_{j=m}^{n} f(j)$$

um ein *leeres* Produkt, dieses ist definitionsgemäß gleich 1.

Beispiele

- Für $f(x) = x^3$ erhalten wir

$$\sum_{j=1}^{4} f(j) = f(1) + f(2) + f(3) + f(4) = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3.$$

- Wir haben

$$\sum_{j=9}^{12} \sqrt{j} = \sqrt{9} + \sqrt{10} + \sqrt{11} + \sqrt{12},$$

  hier ist $f(j) = \sqrt{j}$.

- Wir haben

$$\sum_{j=3}^{1} j = 0.$$

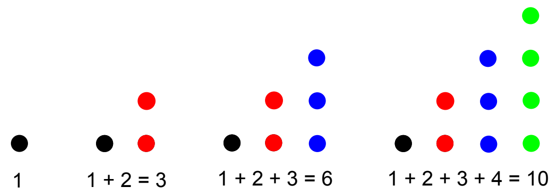
- Wir haben

$$\sum_{j=-3}^{2} j = (-3) + (-2) + (-1) + 0 + 1 + 2.$$

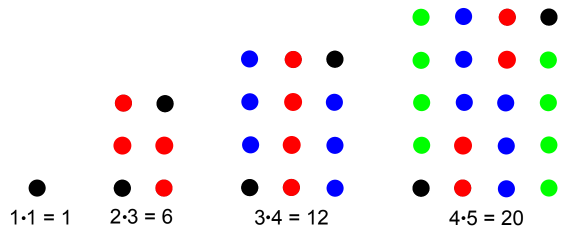
Was ist nun

$$\sum_{j=1}^{n} j = 1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) + n?$$

Die Folge der Summe der ersten n Zahlen $1, 3, 6, 10, \ldots$ lässt sich durch Dreiecke darstellen; daher werden sie auch *Dreieckszahlen* genannt:



Die Gesamtanzahl der Punkte eines Dreiecks lässt sich nun leicht berechnen, indem wir die Dreiecke spiegeln. Dann erhalten wir Rechtecke deren lange Seite gerade eine Einheit länger ist als die kurze Seite:



Somit ist $n \cdot (n+1)$ die Anzahl der Punkte des n-ten Rechtecks. Teilen wir anschließend durch 2, so erhalten wir die Anzahl der Punkte des n-ten Dreiecks; diese entspricht der Summe der ersten n Zahlen. Mithin haben wir folgende Summenformel

$$\sum_{j=1}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Dies formulieren wir als Satz:

Satz 2.2.1 (Gaußsche Summenformel)**.** Für die Summe der ersten n Zahlen gilt

$$\sum_{j=1}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Alternativ können wir die Summenformel wie folgt beweisen: Wir schreiben die Zahlen von 1 bis n von links nach rechts in einer Zeile auf und direkt darunter von rechts nach links und erhalten

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & \ldots & (n-1) & n \\ n & (n-1) & (n-2) & \ldots & 2 & 1 \end{array}$$

Wir beobachten, dass die Summe von jeder Spalte $n+1$ ist. Es gibt n Spalten. Also ist $n \cdot (n+1)$ die zweifache Summe der ersten n Zahlen. Somit gilt für die Summe der ersten n Zahlen:

$$\sum_{j=1}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Der Anekdote nach kam der berühmte Carl Friedrich Gauß auf diesen Ansatz als Sechsjähriger. Einen weiteren Beweis werden wir sehen, wenn wir das Beweisfahren der vollständigen Induktion (Vorlesung 8) behandeln.
Unter Anwendung der Gaußschen Summenformel erhalten wir: bubble sort benötigt also im worst case bei einer Liste mit n Elementen insgesamt

$$\sum_{j=1}^{n-1} j = \frac{n \cdot (n-1)}{2}$$

Vertauschungen, um die Liste zu sortieren.

2.3 Ganze Zahlen

Im Bereich $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen können wir bekanntlich eine Gleichung

$$a + x = b$$

nur dann in x lösen, wenn $a \leq b$.
So können wir etwa

$$7 + x = 5$$

mit $x \in \mathbb{N}$ *nicht* lösen.
Hierzu benötigen wir die *negativen* Zahlen.
Die ganzen Zahlen sind

$$\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$$

Wir bezeichnen sie mit

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}.$$

Im Bereich der ganzen Zahlen gilt folgende Existenzaussage, die in $\mathbb{N}$ noch falsch ist: Zu jedem $n \in \mathbb{Z}$ gibt es ein n' mit $n + n' = 0$. Wir nennen n' ein Inverses von n bezüglich der Addition.