Vorlesung 4

Zahlenbereiche

4.1 Rationale Zahlen

Wir haben gesehen, dass nicht jedes Element aus $\mathbb{Z}$ ein multiplikatives Inverses besitzt. Dies führt zur Einführung der *rationalen Zahlen* $\mathbb{Q}$, wobei der Buchstabe Q für „Quotient“ steht. Eine *rationale Zahl* $\frac{m}{n}$ ist ein Quotient ganzer Zahlen $m, n \in \mathbb{Z}$ und $n \neq 0$. Dabei heißt m *Zähler* und n *Nenner*. Wegen $\frac{m}{1} = m$ ist $\mathbb{Z}$ eine Teilmenge von $\mathbb{Q}$.
Zwei Brüche sind *gleich*:

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} \qquad :\Longleftrightarrow \qquad ab' = a'b$$

Wir können Brüche *erweitern*:

$$\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc} \qquad \text{mit } c \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

Wir können Brüche *kürzen*:

$$\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b} \qquad \text{mit } c \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

4.1.1 Addition von Brüchen

Wenn zwei Brüche den gleichen Nenner haben, so ist die Addition einfach:

$$\frac{m}{n} + \frac{m'}{n} := \frac{m + m'}{n}$$

Falls zwei Brüche keinen gleichen Nenner besitzen, dann können wir die Brüche so weit erweitern, bis sie denselben Nenner haben:

$$\frac{a}{m} + \frac{b}{n} = \frac{an + bm}{mn}$$

Es bietet sich an, das kleinste gemeinsame Vielfache (kgV) von m und n als gemeinsamen Nenner zu wählen. Derart bleiben Zähler und Nenner kleinstmöglich.

Offenbar ist $0 = \frac{0}{m}, m \neq 0$ ein neutrales Element bezüglich der Addition. Zu $\frac{m}{n}$ gibt es ein additives Inverses, nämlich $\frac{-m}{n}$. Denn:

$$\frac{m}{n} + \frac{-m}{n} = \frac{m-m}{n} = \frac{0}{n} = 0$$

Somit können wir $\frac{-m}{n} = -\frac{m}{n}$ schreiben. Damit ist $(\mathbb{Q}, +)$ eine abelsche Gruppe.

Vorsicht:
Es gilt *nicht* $\frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ (siehe auch Übungsaufgabe auf Blatt 4).

Ebenso gilt *nicht*: $\frac{a}{b} + \frac{a}{b'} = \frac{a}{b+b'}$. Dies folgt sofort aus Obigem.

4.1.2 Multiplikation von Brüchen

Dies ist einfach

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} := \frac{a \cdot c}{b \cdot d} \qquad \text{mit } a, b, c, d \in \mathbb{Z}, \ \ b, d \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$

Die Addition von Brüchen ist komplizierter als ihre Multiplikation.

$(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$ ist eine abelsche Gruppe. Das neutrale Element ist 1. Für einen Bruch $\frac{m}{n} \neq 0$ ist das multiplikative Inverse gegeben durch $\frac{n}{m}$.
Somit ist $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ ein Ring. $\mathbb{Q}$ ist sogar ein Körper, aber dazu später mehr.

Für $a, b, c, d \in \mathbb{Z}^+$ ($\mathbb{Z}^+$ enthält nur die positiven ganzen Zahlen) gilt immer:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} > \frac{a+c}{b+d}, \qquad \text{also} \qquad \frac{a}{b} + \frac{c}{d} \neq \frac{a+c}{b+d}.$$

Diese Ungleichung ist leicht einzusehen, denn:

$$\frac{a}{b} > \frac{a}{b+d}, \qquad \text{und} \qquad \frac{c}{d} > \frac{c}{b+d}.$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{a}{b} + \frac{c}{d} > \frac{a}{b+d} + \frac{c}{b+d} = \frac{a+c}{b+d}$$

Definition 4.1.1. Sei K eine Menge mit zwei Verknüpfungen

$$\begin{aligned} + &: K \times K \longrightarrow K \\ \cdot &: K \times K \longrightarrow K. \end{aligned}$$

$(K, +, \cdot)$ heißt *Körper*, wenn

(K1) $(K, +)$ ist eine abelsche Gruppe.

(K2) $(K \setminus \{0\}, \cdot)$ ist eine abelsche Gruppe.

(K3) Es gelten die Distributivgesetze, d.h. $a(b+c) = ab+ac$ und $(a+b)c = ac+bc$ für alle $a, b, c \in K$.

Die *Division* zweier rationaler Zahlen ist definiert als

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} := \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c},$$

also die Multiplikation von $\frac{a}{b}$ mit dem multiplikativen Inversen von $\frac{c}{d}$.

Vorsicht: Mit der Bezeichnung $2\frac{a}{b}$ ist im folgenden $\frac{2 \cdot a}{b}$ gemeint und kein gemischter Bruch (vgl. $2\frac{1}{2} = 2 + \frac{1}{2}$).

4.2 Dezimalzahlen

Jede rationale Zahl lässt sich als Bruch schreiben. Diese lässt sich in eine Dezimalzahl umwandeln, letztere ist entweder endlich oder periodisch. Genauer:

Satz 4.2.1. Die rationale Zahl $\frac{z}{n}$ mit $z, n \in \mathbb{Z}$ in ihrer Darstellung als Dezimalzahl ist entweder abbrechend oder periodisch. Die Periode ist höchstens von der Länge $n - 1$.

Vor dem Beweis erinnern wir noch einmal an das schriftliche Dividieren; wir betrachten 121 dividiert durch 7.

$$
\begin{array}{l}
1\,2\,1 : 7 = 17{,}\overline{285714} \\
\underline{-7} \\
\quad 5\,1 \\
\underline{-4\,9} \\
\qquad 2\,0 \\
\quad \underline{-1\,4} \\
\qquad\quad 6\,0 \\
\qquad \underline{-5\,6} \\
\qquad\qquad 4\,0 \\
\qquad\quad \underline{-3\,5} \\
\qquad\qquad\quad 5\,0 \\
\qquad\qquad \underline{-4\,9} \\
\qquad\qquad\qquad 1\,0 \\
\qquad\qquad\qquad \underline{-7} \\
\qquad\qquad\qquad\quad 3\,0 \\
\qquad\qquad\qquad \underline{-2\,8} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 2
\end{array}
$$

Beweis. Es gibt bezüglich der Division durch n insgesamt n Restklassen. Beim Verfahren des schriftlichen Dividierens kommen wir zum Abschluss, falls die Restklasse 0 auftritt. Andernfalls können höchstens $n - 1$ Restklassen auftreten. □

Satz 4.2.2. Jede abbrechende oder periodische Dezimalzahl lässt sich als gewöhnlicher Bruch darstellen, ist also eine rationale Zahl.

Aus den Sätzen 4.2.1 und 4.2.2 folgt

Satz 4.2.3. Die rationalen Zahlen sind genau die abbrechenden oder periodischen Dezimalzahlen.

Die Umwandlung einer abbrechenden Dezimalzahl in einen Bruch ist einfach. Für die Umformung von einer periodischen Dezimalzahl in einen Bruch benutzen wir die folgenden Beziehungen:

$$0{,}\overline{1} = \frac{1}{9}, \qquad 0{,}\overline{01} = \frac{1}{99}, \qquad 0{,}\overline{001} = \frac{1}{999}$$

Durch Multiplikation und Addition erhalten wir hieraus für alle periodischen Dezimalzahlen die entsprechende Bruchdarstellung, z.B. $0,\overline{2}$:

$$0{,}\overline{1} = \frac{1}{9} \qquad \stackrel{\cdot 2}{\Longrightarrow} \qquad 0{,}\overline{2} = \frac{2}{9}$$

Insbesondere gilt:

$$1 = \frac{9}{9} = 0{,}\overline{9}.$$

Die Beziehungen ergeben sich aus

$$10 \equiv 1 \bmod 9, \qquad 100 \equiv 1 \bmod 99, \qquad 1000 \equiv 1 \bmod 999, \qquad \text{usw.}$$

Allgemein gilt: Es sei m eine k-stellige Zahl deren Ziffern alle 9 seien. Im Divisionsverfahren von 1 durch m bedarf es nun k Schritte, um 10^k zu erreichen.

4.3 Aussagenlogik

Es seien A und B Aussagen, z.B.

$A \equiv$ "Es regnet.“ und $B \equiv$ „Die Erde ist naß.“

Eine Aussage ist entweder wahr (w) oder falsch (f). Eine Implikation $A \Rightarrow B$ ist eine Schlussfolgerung: Wenn A gilt, so muss auch B gelten.
Im konkreten Beispiel haben wir also: „Wenn es regnet, so wird die Erde naß.“
Die Implikation $A \Rightarrow B$ ist selbst eine Aussage, die wahr oder falsch sein kann. Wenn $A \Rightarrow B$ gilt, so muss nicht notwendigerweise auch die Rückrichtung $B \Rightarrow A$ gelten, z.B.

$A \equiv$ „Ich rufe Dich an.“ und $B \equiv$ „Dein Telefon klingelt.“

Die Implikation $A \Rightarrow B$ ist wahr: „Wenn ich dich anrufe, dann klingelt dein Telefon.“ Die Rückrichtung ist aber nicht immer wahr: „Wenn dein Telefon klingelt, dann rufe ich dich an.“ ist nicht wahr (es hätte jemand anders anrufen können).
Falls die Rückrichtung $B \Rightarrow A$ zusätzlich auch gilt, dann sind beide Aussagen gleichwertig bzw. *äquivalent*, wir schreiben hierfür

$$A \Leftrightarrow B.$$

Ein Beispiel hierfür haben wir bereits mit der Quersummenregel gesehen:

$A \equiv$ „Die Zahl a ist durch 3 teilbar.“
$B \equiv$ „Die Quersumme von a ist durch 3 teilbar.“

Wir haben in der letzten Vorlesung gezeigt, dass $A \Leftrightarrow B$.

Wir können eine Aussage A negieren. Für die Negation von A schreiben wir $\neg A$. Beispielsweise haben wir

$$A \equiv \text{„Es regnet."} \qquad\qquad \neg A \equiv \text{„Es regnet nicht."}$$

Wir können zwei Aussagen A und B logisch verknüpfen. Wir schreiben $A \wedge B$ (lies: „A und B"), wenn beide Aussagen gleichzeitig gelten sollen. Der Wahrheitswert von $A \wedge B$ hängt von A und B ab vermöge der folgenden *Wahrheitstafel*

A	B	$A \wedge B$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	f

Wir schreiben $A \vee B$ (lies „A oder B"), wenn mindestens eine der Aussagen gelten soll, also erhalten wir

A	B	$A \vee B$
w	w	w
w	f	w
f	w	w
f	f	f

Für die Implikation $A \Rightarrow B$ haben wir folgende Wahrheitstafel

A	B	$A \Rightarrow B$
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

Die letzen beiden Zeilen in der Wahrheitstafel besagen also, dass man unter falschen Voraussetzungen alles folgern kann (wahre und falsche Aussagen).

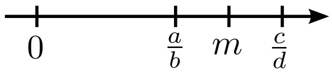
Eine wichtige Äquivalenz (Gesetz der Kontraposition) ist die folgende

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A).$$

Wir können diese mittels einer Wahrheitstafel verifizieren. Das Gesetz der Kontrapositon verwenden wir bei indirekten Beweisen. Einen indirekten Beweis führen wir in folgender Situation: Wir wissen, dass A wahr ist und die Implikation „$A \Rightarrow B$" ist schwer zu zeigen. Wenn A wahr ist, dann ist $\neg A$ falsch. Wir nehmen nun an, dass B falsch ist, dann muss $\neg B$ wahr. Falls aus $\neg B$ wahr die Aussage $\neg A$ wahr folgt, dann haben wir einen Widerspruch, denn nach Voraussetzung $\neg A$ ist falsch! Demnach war unsere Annahme, dass B falsch ist, falsch. Also muss B wahr sein. Einen ersten indirekten Beweis führen wir im folgenden Abschnitt.

4.4 Reelle Zahlen

Nach Einführung der rationalen Zahlen könnte man meinen, diese füllten die ganze Zahlengerade aus. In beliebiger Nähe einer rationalen Zahl liegen unendlich viele weitere rationale Zahlen. Anders formuliert: zwischen zwei beliebigen rationalen Zahlen findet man immer eine weitere rationale Zahl.



$$\boxed{m = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) \in \mathbb{Q}}$$

Daher gibt es auch (anders als bei den ganzen Zahlen) zu den rationalen Zahlen keine nächstkleinere oder nächstgrößere Zahl. Trotz der unendlich vielen rationalen Zahlen gibt es kein x mit $x^2 = 2$ und $x \in \mathbb{Q}$. Dies wollen wir nun beweisen – und zwar mittels eines Beweises durch Widerspruch.

Lemma 4.4.1. $x = \sqrt{2}$ ist keine rationale Zahl.

Beweis. Angenommen, x ist eine rationale Zahl. Dann haben wir $x = \frac{m}{n}$ mit $\mathrm{ggT}(m, n) = 1$ (d.h. die Bruchdarstellung von x kann nicht weiter gekürzt werden). Daraus folgt:

$$\begin{aligned} x^2 = \frac{m^2}{n^2} &= 2 \\ \Rightarrow m^2 &= 2n^2 \end{aligned}$$

$2n^2$ ist gerade, daraus folgt, dass auch m^2 gerade sein muss. m^2 kann nur gerade sein, wenn m gerade ist, daher $m = 2k$ für ein $k \in \mathbb{Z}$. Daraus folgt:

$$\begin{aligned} (2k)^2 = 4k^2 &= 2n^2 \\ \Rightarrow 2k^2 &= n^2 \end{aligned}$$

Somit ist auch n^2 eine gerade Zahl, damit ist n gerade. Hieraus folgt: $\mathrm{ggT}(m, n) \geq 2 \neq 1$. Widerspruch! Also ist $\sqrt{2}$ nicht rational. $\square$

$\sqrt{2}$ ist irrational. Da die rationalen Zahlen genau die Zahlen sind, die eine abbrechende oder periodische Darstellung als Dezimalzahl haben, sind die *irrationalen Zahlen* diejenigen, deren Dezimaldarstellung unendlich und nicht periodisch ist.

Definition 4.4.2. Die Menge der *reellen Zahlen* $\mathbb{R}$ ist die Vereinigung der rationalen Zahlen mit den irrationalen Zahlen.

Bemerkung. $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ist ein Körper.